

51
MEN Pad
+C
T/M

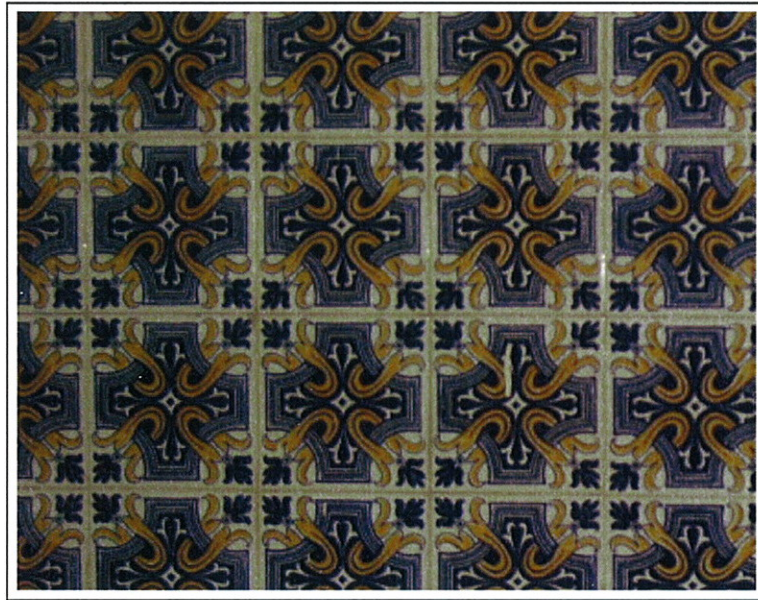
62568



UNIVERSIDADE da MADEIRA

Departamento de Matemática e Engenharias

PADRÕES GEOMÉTRICOS NA AZULEJARIA



José Américo Vieira Mendonça
(Licenciado)

Dissertação para Obtenção do Grau de Mestre em Matemática
(Área de Especialização de Matemática para o Ensino)

UNIVERSIDADE DA MADEIRA
SECTOR DE DOCUMENTAÇÃO
E ARQUIVO

Co-orientadores:

Professor Doutor José Francisco da Silva Costa Rodrigues
Professor Doutor José Manuel Nunes Castanheira da Costa

Funchal, Junho de 2007



"A arte de desenhar pavimentações e padrões, é claramente muito antiga e bem desenvolvida. Em contraste, a ciência das pavimentações e padrões, o que para nós significa o estudo das suas propriedades matemáticas, é comparativamente recente e muitas partes deste tema permanecem ainda por explorar".

Shepard e Grunbaum em *Tilings and Patterns*

Dedicatória

Às minhas Filhas. À minha Mulher.

E aos meus Pais.

Agradecimentos

A todos quantos contribuíram, na sua génese e na sua evolução, para a concepção e desenvolvimento deste trabalho, o meu reconhecimento e agradecimento.

Em especial:

- Aos meus co-orientadores:

Professor Doutor José Manuel Nunes Castanheira da Costa

Professor Doutor José Francisco da Silva Costa Rodrigues

- À minha Mulher e às minhas Filhas.

- Aos meus pais.

- À Casa-Museu Frederico de Freitas, na pessoa da D^a Margarida Freitas.

A todos, o meu muito obrigado!

Resumo

Esta tese subordinada ao tema *Padrões Geométricos na Azulejaria* está organizada em três capítulos, além dos Anexos: Grupos Discretos de Isometrias no Plano; À Descoberta de Padrões e Uma Breve Exploração Didáctica.

Nos *Grupos Discretos de Isometrias no Plano*, o objectivo é obter a classificação dos subgrupos discretos do grupo das isometrias do plano. Começamos, naturalmente, por definir o grupo das isometrias do plano e os conceitos de transformação ortogonal e de grupo discreto. Esta classificação está intimamente ligada à natureza do subgrupo das translações que fazem parte do grupo em causa. Temos, em primeiro lugar, os grupos que não contêm translações, chamados grupos finitos ou grupos de rosáceas.

Estes são de dois tipos possíveis: grupos cíclicos, denotados por C_n e grupos diedrais, denotados por D_n . Estes últimos distinguem-se dos anteriores por conterem reflexões. Seguem-se os grupos de frisos, cujo grupo das translações é gerado por um só vector. Existem, exactamente, sete classes de grupos de frisos. No caso do subgrupo das translações ser gerado por dois vectores linearmente independentes, obtém-se os grupos de padrões. Existem, exactamente, dezassete classes de padrões.

No capítulo dois, *À Descoberta de Padrões*, temos a identificação de alguns padrões encontrados em azulejos e calçadas, patentes em monumentos dos panoramas regional, nacional e internacional.

No início do capítulo é feita uma abordagem à simetria na arte islâmica e falamos um pouco sobre Alhambra, passando, posteriormente, à evolução do azulejo quanto à técnica e ao seu percurso histórico em Portugal.

No capítulo três, *Uma Breve Exploração Didáctica*, propõe-se uma sequência de actividades, para serem resolvidas dentro e fora da sala de aulas, balizadas pelos temas: *Construindo o Conceito de Simetria, Isometrias do Plano, Classificando e Identificando as Simetrias do Plano e Pavimentações*.

Na parte *Anexos* encontramos: um breve estudo feito sobre pavimentações; algoritmos para classificação de grupos de frisos e grupos de padrões; tábua de equivalência de notações para grupos de padrões; bolsa de polígonos; bolsa de padrões e padrões existentes em igrejas da Região Autónoma da Madeira.

Palavras-chave

Padrões Geométricos; Subgrupos Discretos; Isometrias do Plano; Transformações Ortogonais; Subgrupos Ornamentais do Plano; Grupos de frisos; Grupos de Padrões e Pavimentações.

Abstract

This thesis, *Geometric Patterns in Tiling* is organized in three chapters: Discrete Groups of Isometries of the plain; Discovering Patterns and a Brief Didactical Exploration. It also has some annexes.

In first chapter, the aim is to get the classification of the discrete sub-groups of the group of the isometries of the plan. We start, naturally by defining the group of the isometries of the plan and the concepts of orthogonal transformation and discrete group. This classification is closely related to the nature of the sub-group of translations that are part of the group in question. Firstly, we have the groups that do not contain translations, called finite groups or groups' rosettes.

These are of two possible types: cyclical groups, denoted by C_n and dihedral groups, denoted by D_n . These last ones are distinguished from the previous ones because they contain reflections. Then we have the groups of friezes, whose group of the translations is generated by only one alone vector. There are, exactly, seven classes of groups of friezes. In case the sub-group of the translations is generated by two linearly independent vectors, we have the groups of patterns. There are, exactly, seventeen classes of patterns.

In chapter two, Discovering Patterns, we have identified some patterns found in tiles and sidewalks, patents in monuments, and public spaces, regional, national and international panoramas.

At the beginning of the chapter mention is made to symmetry in Islamic art and we talk a little of Alhambra, mentioning, the evolution of the tile in what concerns the technique and its historical path in Portugal.

In chapter three, a Brief Didactical Exploration, we propose a sequence of activities, to be developed inside and outside of the classroom, under the themes: Building the Concept of Symmetry, Isometries of the Plain, Classifying and Identifying the Symmetries of the Plain and Pavements. In the annexes e have: a brief study on pavements; algorithms for the classification of groups of friezes and groups of patterns; equivalence a table of notations for groups of patterns; package of polygons; existing package of patterns and existing patterns in churches of the Region of Madeira.

Keywords:

Geometric Patterns; Discrete Sub-groups; Isometries of the Plain; Orthogonals Transformations; Ornamental Sub-groups of the Plane; Groups of friezes; Groups of patterns and Pavements.

PADRÕES GEOMÉTRICOS NA AZULEJARIA

José Américo Vieira Mendonça

2005-2007

Conteúdo

1. Prefácio	v
Capítulo 1. GRUPOS DISCRETOS DE ISOMETRIAS EM \mathbb{R}^2	1
1. Introdução	1
2. O Plano Euclidiano	2
3. Subgrupos Finitos de $O(\mathbb{R}^2)$	13
4. Grupos Discretos de Isometrias - Generalidades	14
5. Subgrupos de Rosáceas e de Frisos	18
6. Subgrupos de Padrões	26
Capítulo 2. À DESCOBERTA DE PADRÕES	55
1. Introdução	55
2. Simetria na Arte Islâmica	58
3. A Evolução do Azulejo em Portugal	60
4. Classificação dos Azulejos	63
5. Identificação e Classificação de Padrões	67
Capítulo 3. UMA BREVE EXPLORAÇÃO DIDÁCTICA	92
1. Introdução	92
2. Construindo o Conceito de Simetria	94
3. Isometrias do Plano	98
4. Classificando e Identificando as Simetrias do Plano	104
5. Pavimentações	113
Capítulo 4. ANEXOS	118
1. ANEXO – Pavimentações	118
2. ANEXO – Algoritmo para Classificação de Frisos	124
3. ANEXO – Algoritmo para Classificação de Padrões	125
4. ANEXO – Símbolos de Centros de Rotação	129
5. ANEXO – Tábua de Equivalência de Notações para Grupos de Padrões	130
6. ANEXO – Bolsa de Polígonos	131
7. ANEXO – Bolsa de Padrões (desdobrável)	136
8. ANEXO – Padrões em Igrejas Regionais	137

1. Prefácio

Este trabalho subordinado ao tema **Padrões Geométricos na Azulejaria** insere-se no âmbito da segunda parte do mestrado em Matemática para o Ensino, que teve início no ano lectivo de 2004/2005. O tema foi proposto pelo co-orientador – Professor Doutor José Francisco Rodrigues. Sendo esta uma dissertação em Matemática para o ensino e com este tema, inevitavelmente, tinha de ser doseada de Matemática, Azulejos e Didáctica, assim organizámos esta tese em três partes principais, a que chamámos capítulos e, que passamos a resumir:

Capítulo 1 – **Grupos Discretos de Isometrias em IR^2** . Sendo esta tese na área da matemática havia que preparar, pelo menos, um capítulo onde houvesse uma forte componente matemática, aliada ao facto, é claro, das necessárias fundamentações que se impõem.

Assim neste primeiro capítulo o texto é escrito seguindo o estilo existente na maioria dos textos matemáticos, pautado por itens declaratórios, (tipo: teoremas, proposições, lemas, demonstrações, definições,...), todavia sempre surgem alguns conceitos e resultados ao longo do texto.

Para não tornarmos o documento, no seu todo, demasiado extenso, tivemos de tratar (infelizmente), de forma bastante breve questões bastante complexas e profundas, daí que não pudemos evitar as tradicionais (e geralmente deploráveis) expressões "é bem conhecido que...", "é fácil demonstrar que...". No entanto, tentámos ser criteriosos neste aspecto e sempre que tivemos dúvidas sobre a demonstração ser ou não fácil, procurámos indicar um caminho para demonstrá-la ou indicar uma referência bibliográfica adequada e acessível.

Capítulo 2 – **À Descoberta de Padrões**. Neste capítulo abordamos a Simetria na Arte Islâmica, a Evolução do Azulejo em Portugal, a Classificação dos Azulejos consoante a técnica e a Identificação e Classificação de Padrões.

Capítulo 3 – **Uma Breve Exploração Didáctica**. Neste capítulo apresentamos, uma sequência de exercícios, enquadrada nas seguintes categorias: Construindo o Conceito de Simetria, Isometrias do Plano, Classificando e Identificando as Simetrias do Plano.

Criámos mais uma parte denominada **Anexos**. Aqui, colocámos: um breve estudo sobre as pavimentações; algoritmo para classificar frisos; algoritmos para classificar padrões; símbolos utilizados para representar centros de rotação; tábua de equivalências de notações para grupos de padrões (desdobrável); bolsa de polígonos regulares; bolsa de padrões (desdobrável) e padrões de azulejos existentes em igrejas da região.

Algumas fotos e materiais gráficos, inseridos neste trabalho, foram extraídos de livros, de jornais, postais e, outras fontes, tais como Internet. A menos de algum lapso, que, eventualmente possa existir, mencionaremos sempre os

nomes dos respectivos autores, editoras, etc. Algumas fotos, nomeadamente, dos padrões de azulejos da Quinta Monte Palace, na Madeira, das calçadas da região, e das igrejas da região são da nossa autoria.

No que concerne às referências bibliográficas, organizámo-las em duas categorias: Livros/revistas e Páginas Electrónicas. A primeira está ordenada alfabeticamente.

CAPÍTULO 1

GRUPOS DISCRETOS DE ISOMETRIAS EM \mathbb{R}^2

1. Introdução

O objectivo deste capítulo é obter uma classificação dos subgrupos discretos do grupo das isometrias do plano euclidiano.

Veremos que as isometrias (ou movimentos rígidos) do plano euclidiano são de quatro tipos: *translações*, *rotações*, *reflexões* e *reflexões deslizantes*. Os dois primeiros mantêm a orientação do plano e dizem-se, por isso, *movimentos directos* e os dois últimos invertem a orientação e, por isso, são chamados *movimentos inversos*. Demonstra-se que qualquer movimento rígido do plano euclidiano se pode obter através da composição de uma translação seguida de uma rotação e de uma reflexão. Ou seja, o conjunto dos movimentos rígidos do plano é gerado pelas *translações*, *rotações* e *reflexões*.

Dos vários movimentos possíveis, existem dois tipos que mantêm fixa a origem, são eles as *rotações de centro na origem* e as *reflexões em rectas que passam pela origem*. São chamados de **transformações ortogonais**.

Toda a figura simétrica é composta por um motivo, digamos, a forma básica, que se repete mediante translações, rotações e reflexões. Veremos que estes movimentos dão origem aos vários grupos discretos de isometrias do plano euclidiano. Estes grupos são conhecidos por *grupos ornamentais do plano euclidiano* e podem ser agrupados em três categorias: *Grupos Finitos*, *Grupos de Frisos* e *Grupos de Padrões*. Esta caracterização está intimamente ligada à natureza do subgrupo das translações que fazem parte do grupo em causa. Nos grupos finitos não existem translações. Os movimentos do plano pertencentes a esses grupos são rotações e reflexões numa recta. Os grupos de frisos caracterizam-se por conterem translações segundo uma única direcção, rotações e reflexões (em rectas de mesma direcção ou de direcção perpendicular à definida pelas translações). Existem apenas sete (classes) de grupos de frisos. Quanto aos grupos de padrões, caracterizam-se por conterem translações associadas a dois vectores do plano linearmente independentes. Uma vez que estamos a trabalhar com subgrupos discretos do plano, podemos garantir a existência de vectores linearmente independentes de comprimento mínimo, bem como ângulos de amplitude mínima. Consideremos os vectores u e v linearmente independentes de comprimento mínimo. Consoante a relação entre os

comprimentos dos vectores $u, v, u-v$ e $u+v$, obtemos células unitárias (paralelogramos fundamentais) distintas que, por translação, irão gerar redes ou malhas distintas. Existem cinco tipos de células unitárias. Identificaremos os centros de rotação de ordem máxima de uma célula que coincidem com os vértices da referida célula e através do teorema da *restrição euclidiana*, também conhecido por *restrição cristalográfica*, veremos que apenas existem 5 grupos de padrões do plano euclidiano que não contêm reflexões. Estes grupos correspondem, como veremos, às rotações de ângulos $\pi, \pi/2, \pi/3$ e $2\pi/3$ e à rotação trivial 2π , que corresponde à identidade. Uma vez identificada a célula unitária, combinando com uma das quatro rotações não triviais, obtemos a classificação dos restantes 12 grupos de padrões que contêm isometrias inversas (reflexões), perfazendo um total de 17.

No final do capítulo propomos, em género de actividade, a identificação dos grupos discretos do plano que correspondem aos grupos de simetria das figuras lá apresentadas. A solução será apresentada no capítulo três.

2. O Plano Euclidiano

Identificamos o plano euclidiano ao conjunto \mathbb{R}^2 dos pares de números reais. Dados $p = (p^1, p^2)$ e $v = (v^1, v^2)$, elementos de \mathbb{R}^2 , $\mathbb{R}v$ designa o subespaço de \mathbb{R}^2 gerado por v , de modo que $\mathbb{R}v = \{\lambda v : \lambda \in \mathbb{R}\}$, e a recta que passa por p e tem direcção $\mathbb{R}v$ é, por definição, o conjunto $\{p + \lambda v : \lambda \in \mathbb{R}\}$. Se D designa uma recta, designamos a sua direcção por \vec{D} . Duas rectas D e E são paralelas se e só se $\vec{D} = \vec{E}$. Não excluimos a possibilidade $D = E$ desta definição. Duas rectas D e E tais que $\vec{D} \neq \vec{E}$ são ditas concorrentes. Em tal caso, o conjunto $D \cap E$ é não-vazio e contém apenas um ponto. Dada uma base B de \mathbb{R}^2 e dois vectores u e v , a matriz cujas colunas são constituídas pelas coordenadas de u e v na base B é designada por $[u, v]_B$. Usaremos repetidamente o seguinte critério para estabelecer a independência linear de dois vectores: Dois vectores u, v são linearmente independentes se e só se existe uma base B tal que $\det[u, v]_B \neq 0$.

Em \mathbb{R}^2 introduzimos uma distância, a distância euclidiana, do seguinte modo. A aplicação $\Phi : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$\Phi(x, y) = x^1 y^1 + x^2 y^2$$

é simétrica, bilinear e definida positiva. Isto é, temos $\Phi(y, x) = \Phi(x, y)$,

$$\Phi(ax + bx', y) = a\Phi(x, y) + b\Phi(x', y)$$

para quaisquer $a, b \in \mathbb{R}$, $x, x', y \in \mathbb{R}^2$ e $\Phi(x, x) > 0$ para todo $x \neq 0$. Esta forma tem, ainda, a seguinte propriedade, que usamos mais adiante:

Teorema 1.1. (*Desigualdade de Cauchy-Schwarz*) Para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}^2$ tem-se

$$|\Phi(x, y)|^2 \leq \Phi(x, x)\Phi(y, y).$$

DEMONSTRAÇÃO. De facto, se $\lambda \in \mathbb{R}$, temos

$$\Phi(x + \lambda y, x + \lambda y) = \Phi(x, x) + 2\lambda\Phi(x, y) + \lambda^2\Phi(y, y) \geq 0,$$

expressão que implica que a equação de segundo grau em λ

$$\Phi(x, x) + 2\lambda\Phi(x, y) + \lambda^2\Phi(y, y) = 0$$

tem, no máximo, uma raiz real dupla. O seu discriminante é negativo, portanto. Isto é

$$[\Phi(x, y)]^2 - \Phi(x, x)\Phi(y, y) \leq 0,$$

donde o teorema □

Uma consequência deste resultado é que a aplicação $\|\cdot\| : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$\|x\| = \sqrt{\Phi(x, x)}$$

é uma norma sobre \mathbb{R}^2 . Usamo-la para definir a distância euclidiana

$$d : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

por

$$d(x, y) = \|x - y\|.$$

A forma Φ é ainda usada para definir a noção de ortogonalidade e de ângulo. Dois vectores $u, v \in \mathbb{R}^2$ são ortogonais se $\Phi(u, v) = 0$. Duas rectas são ortogonais se as suas direcções são geradas por vectores ortogonais.

A norma $\|\cdot\|$ definida acima tem, ainda, uma propriedade que nos interessa:

Teorema 1.2. Para $x, y \in \mathbb{R}^2$ as duas asserções seguintes são equivalentes:

- (a). Existe $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \geq 0$, tal que $x = \alpha y$;
- (b). $\|x + y\| = \|x\| + \|y\|$.

DEMONSTRAÇÃO. Primeiro, observemos que se (a) é satisfeita, então $\|x\| = |\alpha| \cdot \|y\| = \alpha \|y\|$, de modo que

$$\|x + y\| = (1 + \alpha)\|y\| = \|x\| + \|y\|.$$

Reciprocamente, se $\|x + y\| = \|x\| + \|y\|$, então temos, elevando ao quadrado esta igualdade

$$\Phi(x + y, x + y) = \Phi(x, x) + 2\sqrt{\Phi(x, x)}\sqrt{\Phi(y, y)} + \Phi(y, y).$$

Mas, usando a bilinearidade e a simetria de Φ , temos, também

$$\Phi(x + y, x + y) = \Phi(x, x) + 2\Phi(x, y) + \Phi(y, y)$$

de modo que $\Phi(x, y) = \sqrt{\Phi(x, x)}\sqrt{\Phi(y, y)}$, o que significa que o discriminante da equação usada na demonstração do primeiro teorema é nulo. Isto é, existe um real λ_o tal que $\Phi(x, x) + 2\lambda_o\Phi(x, y) + \lambda_o^2\Phi(y, y) = 0$ e, portanto, temos $\Phi(x + \lambda_o y, x + \lambda_o y) = 0$, o que implica que $x + \lambda_o y = 0$. Como $\Phi(x, y) =$

$\Phi(-\lambda_o y, y) = -\lambda_o \Phi(y, y)$ e $\Phi(x, y) = \sqrt{\Phi(x, x)}\sqrt{\Phi(y, y)} \geq 0$, concluímos que $-\lambda_o \geq 0$, donde o teorema \square

O interesse deste resultado é que nos permite obter uma caracterização das isometrias do plano euclidiano, conceito que passamos a definir.

Definição 1.1. Dizemos que uma aplicação $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ é uma isometria se e só se f é bijectiva e para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}^2$ se tem

$$\|f(x) - f(y)\| = \|x - y\|.$$

Dados uma isometria f e três pontos distintos dois a dois e alinhados p, q, r , podemos, reordenando p, q, r se necessário fôr, supôr que $r - p = \alpha(q - p)$ com $\alpha > 0$. De acordo com o segundo teorema, temos

$$\|r - p\| = \|r - q + q - p\| = \|r - q\| + \|q - p\|.$$

Como f é uma isometria, temos

$$\|f(r) - f(p)\| = \|f(r) - f(q)\| + \|f(q) - f(p)\|$$

e, usando o segundo teorema, esta relação mostra que $f(p), f(q)$ e $f(r)$ são pontos alinhados. Uma vez que f é bijectiva, resulta que

Teorema 1.3. *Uma isometria transforma rectas em rectas.*

Se f é uma isometria, D, D' são rectas e as rectas $f(D)$ e $f(D')$ são concorrentes, então $f(D) \cap f(D')$ contém um ponto r . Como $r \in f(D)$ existe $p \in D$ tal que $f(p) = r$. Da mesma forma, existe $q \in D'$ tal que $f(q) = r$. Como f é bijectiva, concluímos que $p = q$, o que significa que ou $D = D'$ ou D e D' são concorrentes. Assim,

Teorema 1.4. *Uma isometria transforma rectas paralelas em rectas paralelas.*

Este resultado tem uma consequência interessante. De facto, seja f uma isometria tal que $f(0) = 0$ e consideremos $x, y \in \mathbb{R}^2$ distintos, diferentes de zero e linearmente independentes. As rectas $\mathbb{R}x$ e $y + \mathbb{R}x$ são paralelas e, da mesma forma, as rectas $\mathbb{R}y$ e $x + \mathbb{R}y$ são paralelas. Obtemos assim um paralelogramo de vértices $0, x, y$ e $x + y$. De acordo com o teorema anterior, a sua imagem será um paralelogramo do qual $0, f(x)$ e $f(y)$ são vértices. Concluímos que o quarto vértice é $f(x) + f(y)$, donde a relação

$$f(x + y) = f(x) + f(y).$$

Se x e y são diferentes de zero, linearmente dependentes e $y \neq -x$, escolhemos um terceiro vector z não colinear com x . Como r e $x - r$ são linearmente independentes¹, o que acabamos de provar permite-nos afirmar que $f(x) =$

¹ $B = (x, r)$ é uma base de \mathbb{R}^2 e

$$\det[r, x - r]_B = \det \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \neq 0$$

$f(x - r) + f(r)$. Da mesma forma, y e r são linearmente independentes², de modo que $f(y+r) = f(y) + f(r)$. Finalmente, como $x-r$ e $y+r$ são linearmente independentes³

$$\begin{aligned} f(x + y) &= f(x - r + r + y) \\ &= f(x - r) + f(r + y) \\ &= f(x) - f(r) + f(y) + f(r) \\ &= f(x) + f(y). \end{aligned}$$

Se $y = -x$, reparemos que $\|f(x) - f(0)\| = \|f(x)\| = \|x\|$ e que $f(-x) = bf(x)$ para algum $b \in \mathbb{R}$, pois $-x, 0$ e x são alinhados. Concluimos que $\|-x\| = \|f(-x)\| = |b| \cdot \|f(x)\| = |b| \cdot \|x\|$ de modo que $|b| = 1$ e a injectividade de f implica que $b = -1$, de modo que $f(-x) = -f(x)$. Assim, podemos afirmar que

Teorema 1.5. *Se f é uma isometria tal que $f(0) = 0$, então para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}^2$ tem-se*

$$f(x + y) = f(x) + f(y).$$

Resulta imediatamente deste teorema que, para todo $x \in \mathbb{R}^2$ e todo $m \in \mathbb{Z}$, se tem $f(mx) = mf(x)$. Se $x \in \mathbb{R}^2$ e $m, n \in \mathbb{Z}$ com $n \neq 0$, resulta que

$$mf(x) = f\left(n\frac{m}{n}x\right) = nf\left(\frac{m}{n}x\right),$$

isto é $f(\alpha x) = \alpha f(x)$ para quaisquer $x \in \mathbb{R}^2$ e $\alpha \in \mathbb{Q}$. Por outro lado, se $x \in \mathbb{R}^2$ e $\mu \in \mathbb{R}$, então $f(\mu x)$ e $f(x)$ são colineares, de modo que existe um real $\sigma(\mu, x)$ tal que $f(\mu x) = \sigma(\mu, x)f(x)$. Se y é um outro elemento de \mathbb{R}^2 teremos $f(\mu(x + y)) = \sigma(\mu, x + y)f(x + y)$ e $f(\mu x + \mu y) = \sigma(\mu, x)f(x) + \sigma(\mu, y)f(y)$, de modo que, para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}^2$ e $\mu \in \mathbb{R}$

$$\{\sigma(\mu, x + y) - \sigma(\mu, x)\}f(x) + \{\sigma(\mu, x + y) - \sigma(\mu, y)\}f(y) = 0.$$

Da arbitrariedade dos elementos envolvidos, concluimos que $\sigma(\mu, x + y) = \sigma(\mu, x) = \sigma(\mu, y)$, isto é, que, de facto, $\sigma(\mu, x)$ depende apenas de μ . Assim, existe uma aplicação $\sigma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que, para quaisquer $\mu \in \mathbb{R}$ e $x \in \mathbb{R}^2$

$$f(\mu x) = \sigma(\mu)f(x).$$

A aplicação σ é bijectiva, verifica $\sigma(0) = 0$ e $\sigma(1) = 1$ e $\sigma(ab) = \sigma(a)\sigma(b)$ e, em virtude do teorema anterior, $\sigma(a + b) = \sigma(a) + \sigma(b)$ para quaisquer reais a e b . Isto é, σ é um automorfismo do corpo \mathbb{R} . Como $\sigma(a^2) = \{\sigma(a)\}^2$, é

²Existe $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq 0$, tal que $y = \alpha x$, de modo que

$$\det[y, r]_B = \det \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \neq 0.$$

3

$$\det[x - r, y + r]_B = \det \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = 1 + \alpha$$

claro que se $a > 0$ então $\sigma(a) > 0$, de modo que a aplicação σ respeita a ordem dos números reais. Suponhamos então que existe um real a tal que $\sigma(a) > a$. Existe, então um racional r tal que $\sigma(a) > r > a$. Como $r > a$, concluímos que $r = \sigma(r) > \sigma(a)$, o que é absurdo. Da mesma forma, supôr a existência de um real b tal que $b > \sigma(b)$ conduz-nos a um absurdo e, por conseguinte, temos $\sigma(a) = a$ para todo o real a . Assim, obtemos o seguinte resultado fundamental

Teorema 1.6. *Se f é uma isometria tal que $f(0) = 0$, então f é uma transformação linear.*

Regressando agora à definição de isometria, convém notar, desde logo, que a identidade $1_{\mathbb{R}^2} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ é uma isometria e que a composição de duas isometrias é uma isometria, o que é uma consequência imediata da definição. Um exemplo importante de isometria obtém-se definindo, para cada vector $v \in \mathbb{R}^2$, $t_v : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ por $t_v(x) = x + v$. Esta aplicação é uma isometria. Chamamos-lhe translação de vector v . É claro que $t_0 = 1_{\mathbb{R}^2}$, que $t_v \circ t_u = t_{v+u}$ e que $t_v^{-1} = t_{-v}$ para quaisquer $u, v \in \mathbb{R}^2$.

Se f é uma isometria e $v = f(0)$, seja $h = t_{-v} \circ f$. Uma vez que h é composição de isometrias, h é uma isometria. Como $h(0) = t_{-v} \circ f(0) = t_{-v}(v) = 0$, o teorema anterior diz-nos que h é uma transformação linear. Como $f = t_v \circ h$, concluímos que

Teorema 1.7. *Se f é uma isometria, existem um vector $v \in \mathbb{R}^2$ e uma transformação linear h tais que*

$$f = t_v \circ h.$$

Deste teorema deduzimos que o conjunto $\mathfrak{I}(\mathbb{R}^2)$ das isometrias do plano euclidiano é um grupo para a composição de aplicações. As propriedades das translações descritas atrás permitem concluir que o conjunto das translações, $T(\mathbb{R}^2)$, é um subgrupo de $\mathfrak{I}(\mathbb{R}^2)$.

A decomposição de uma isometria numa translação e numa transformação linear que acabamos de obter, é única. De facto, se existem $v' \in \mathbb{R}^2$ e uma transformação linear h' tais que $t_v \circ h = f = t_{v'} \circ h'$, então temos

$$t_v \circ h(0) = v = t_{v'} \circ h'(0) = v',$$

e, conseqüentemente $h = h'$. Se $f = t_v \circ h$ é esta decomposição única, dizemos que v é o vector de f e que h é a sua parte linear.

A parte linear de uma isometria é, como acabamos de ver, uma isometria linear. Um cálculo simples mostra que temos, para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}^2$,

$$\Phi(x, y) = \frac{1}{2} \{ \Phi(x + y, x + y) - \Phi(x, x) - \Phi(y, y) \}.$$

Por outro lado, se h é uma isometria linear, temos $\|h(x)\| = \|h(x) - h(0)\| = \|x\|$, donde tiramos que $\Phi(h(x), h(x)) = \Phi(x, x)$ para qualquer $x \in \mathbb{R}^2$. Este facto e a relação acima permitem-nos concluir que

Teorema 1.8. *Seja $h : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ uma aplicação linear bijectiva. Então h é uma isometria linear se e só se, para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}^2$ se tem*

$$\Phi(h(x), h(y)) = \Phi(x, y).$$

DEMONSTRAÇÃO. Com efeito, se h é uma isometria linear, temos

$$\begin{aligned} \Phi(h(x), h(y)) &= \frac{1}{2} \{ \Phi(h(x+y), h(x+y)) - \Phi(h(x), h(x)) - \Phi(h(y), h(y)) \} \\ &= \frac{1}{2} \{ \Phi(x+y, x+y) - \Phi(x, x) - \Phi(y, y) \} \\ &= \Phi(x, y). \end{aligned}$$

Reciprocamente, se h é uma transformação linear e verifica a relação

$$\Phi(h(x), h(y)) = \Phi(x, y)$$

para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}^2$, então

$$\begin{aligned} \|h(x) - h(y)\|^2 &= \Phi(h(x) - h(y), h(x) - h(y)) \\ &= \Phi(h(x-y), h(x-y)) \\ &= \Phi(x-y, x-y) \\ &= \|x-y\|^2. \end{aligned}$$

□

Segundo este teorema, uma transformação linear é uma isometria se e só se é uma transformação ortogonal da forma Φ . O conjunto das transformações ortogonais da forma Φ é designado por $O(\mathbb{R}^2)$. Trata-se, evidentemente, de um grupo para a composição de aplicações.

Consideremos a aplicação $\delta_\Phi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^{2*}$, onde \mathbb{R}^{2*} é o dual de \mathbb{R}^2 , que a todo $x \in \mathbb{R}^2$ associa a forma linear $\delta_\Phi(x) : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$[\delta_\Phi(x)](y) = \Phi(x, y).$$

O facto de Φ ser não degenerada implica que δ_Φ é um isomorfismo de espaços vectoriais e, portanto, se $h : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ é uma isometria linear, podemos definir uma nova aplicação linear $h^* : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ por

$$h^* = \delta_\Phi^{-1} \circ h^T \circ \delta_\Phi,$$

onde $h^T : \mathbb{R}^{2*} \longrightarrow \mathbb{R}^{2*}$ é a transposta da aplicação h , isto é, é dada, para toda a forma linear $l \in \mathbb{R}^{2*}$ por $h^T(l)(x) = l \circ h(x)$. A aplicação h^* é a adjunta de h . Note-se que temos, para $x, y \in \mathbb{R}^2$,

$$\begin{aligned} \Phi(x, h(y)) &= [\delta_\Phi(x)] \circ h(y) \\ &= h^T(\delta_\Phi(x))(y) \\ &= \delta_\Phi \circ \delta_\Phi^{-1} \circ h^T \circ \delta_\Phi(x)(y) \\ &= \delta_\Phi \circ h^*(x)(y) \\ &= \Phi(h^*(x), y). \end{aligned}$$

Se h é uma isometria linear, resulta que

$$\Phi(h(x), h(y)) = \Phi(h^* \circ h(x), y) = \Phi(x, y),$$

de modo que temos $\Phi(h^* \circ h(x) - x, y) = 0$ para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}^2$. Assim, temos $h^* \circ h(x) = x$ para todo $x \in \mathbb{R}^2$, o que evidentemente significa que

$$h^* = h^{-1}.$$

Notando que $\det h^* = \det(\delta_{\mathbb{F}}^{-1} \circ h^T \circ \delta_{\mathbb{F}}) = \det h^T = \det h$, esta relação permite-nos concluir que, se h é uma isometria linear, então $\det h = \pm 1$. A relação $h^* = h^{-1}$ permite caracterizar as matrizes das isometrias lineares. De facto, se (e_1, e_2) é a base canónica de \mathbb{R}^2 e (e^1, e^2) é a base de \mathbb{R}^{2*} dual de (e_1, e_2) , de modo que $e^i(e_j) = \delta_j^i$ (símbolo de Kronecker), a matriz de $\delta_{\mathbb{F}}$ nestas bases é a matriz identidade. Consequentemente, a matriz de h^{-1} na base canónica é a transposta da matriz de h nessa mesma base. Assim, se esta matriz de h é

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

então a inversa será

$$M^T = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix},$$

e temos

$$M.M^T = \begin{pmatrix} a^2 + b^2 & ac + bd \\ ac + bd & c^2 + d^2 \end{pmatrix},$$

donde deduzimos o seguinte sistema de equações

$$\begin{cases} a^2 + b^2 = 1 \\ ac + bd = 0 \\ c^2 + d^2 = 1 \\ ad - bc = \pm 1 \end{cases}.$$

Ponhamos $ad - bc = \varepsilon$, de modo que $\varepsilon = \pm 1$. Se $b = 0$, este sistema reduz-se a $a^2 = 1$, $ac = 0$, $c^2 + d^2 = 1$ e $ad = \varepsilon$. Deduzimos que $c = 0$, de modo que $d^2 = 1$ e, portanto, ficamos reduzidos a $a^2 = d^2 = 1$ e $ad = \varepsilon$. Se $b^2 = 1$ então $a = 0$ de modo que a segunda equação implica que $d = 0$, a terceira dá-nos $c^2 = 1$ e a quarta diz-nos que $bc = -\varepsilon$. Se $b \neq 0$ e $b^2 \neq 1$, a segunda equação dá-nos $d = -ac/b$, de modo que, substituindo na quarta, $ad - bc = \varepsilon$, obtemos facilmente que $c = -\varepsilon b$. Substituindo na terceira, temos $b^2 + d^2 = 1$, de modo que $d^2 = a^2$ e, portanto, $d = \eta a$, com $\eta = \pm 1$. Voltando agora à quarta dá-nos $\eta a^2 + \varepsilon b^2 = \varepsilon$, isto é $(\varepsilon - \eta)(b^2 - 1) = 0$. Concluimos que $\eta = \varepsilon$. Destas observações concluimos que, se h é uma isometria linear e $\det h = 1$ então existem reais a, b tais que $a^2 + b^2 = 1$ e

$$M = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}.$$

Se h é uma isometria linear e $\det h = -1$ então existem reais a, b tais que $a^2 + b^2 = 1$ e

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}.$$

As isometrias lineares de determinante positivo são chamadas rotações. O conjunto por elas formado é designado por $SO(\mathbb{R}^2)$. Trata-se evidentemente de um subgrupo comutativo de $O(\mathbb{R}^2)$. Se $h \in SO(\mathbb{R}^2)$ e

$$M = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

é a sua matriz na base canónica, pode provar-se que existe um real $\theta \in [0, \pi[$ tal que $a = \cos \theta$ e $b = \sin \theta$. Dizemos que h é a rotação de ângulo θ e designamo-la por r_θ . Se $h \in O(\mathbb{R}^2)$ e $\det h = -1$, existe um real $\theta \in [0, 2\pi[$ tal que a matriz de h na base canónica é

$$M = \begin{pmatrix} \cos 2\theta & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta \end{pmatrix}.$$

Um cálculo simples mostra que esta matriz tem valores próprios $+1$, associado à direcção própria $\mathbb{R}(\cos \theta, \sin \theta)$ e -1 associado à direcção própria $\mathbb{R}(-\sin \theta, \cos \theta)$. Daqui resulta que h funciona como uma reflexão na recta $\mathbb{R}(\cos \theta, \sin \theta)$. Designamos esta reflexão por s_θ . Note-se que

$$s_\theta \circ s_\theta = 1_{\mathbb{R}^2},$$

isto é, uma reflexão é a sua própria inversa. Coligimos estes resultados no

Teorema 1.9. *Uma isometria linear é uma rotação em torno da origem ou a reflexão numa recta que passa pela origem.*

Combinando este resultado com os T.1.7 e T.1.8, obtemos o

Teorema 1.10. *Qualquer isometria f se escreve de maneira única como composição de uma translação t_u com uma transformação ortogonal h , isto é, $f = t_u \circ h$, onde $u = f(0)$. A h damos o nome de transformação ortogonal associada a f .*

Introduzimos a

Definição 1.2. *Uma isometria f é directa ou inversa consoante a transformação ortogonal associada seja directa ou inversa. Uma isometria é própria se a transformação ortogonal associada não é a identidade.*

O resultado anterior permite-nos ir um pouco mais longe na caracterização das isometrias. Consideremos o caso de uma isometria directa f , de modo que existem um vector $u \in \mathbb{R}^2$ e um real $\theta \in [0, 2\pi[$ tais que $f = t_u \circ r_\theta$. Um cálculo simples mostra que r_θ tem valores próprios reais apenas quando $\theta = 0$, caso em que $r_\theta = 1_{\mathbb{R}^2}$ e $\theta = \pi$, caso em que $r_\theta = -1_{\mathbb{R}^2}$. Daqui resulta que, excepto quando $\theta = 0$, temos $\det(r_\theta - 1_{\mathbb{R}^2}) \neq 0$, isto é, $r_\theta - 1_{\mathbb{R}^2}$ é uma bijecção.

Por conseguinte, existe $p \in \mathbb{R}^2$ tal que $(r_\theta - 1_{\mathbb{R}^2})(p) = -u$. Resulta que

$$r_\theta(p) + u = t_u \circ r_\theta(p) = f(p) = p.$$

Isto é, se f é uma isometria directa própria, então f tem um ponto fixo p . Note-se que neste caso, como $r_\theta(p) = p - u$, temos

$$\begin{aligned} r_\theta(x - p) + p &= r_\theta(x) - r_\theta(p) + p \\ &= r_\theta(x) + u \\ &= f(x), \end{aligned}$$

o que mostra que f é a rotação de ângulo θ em torno do ponto p . Por vezes, usaremos a notação $r_{\theta,p}$ para designar a rotação de ângulo θ em torno do ponto p . Note-se que

$$r_{\theta,p} = t_p \circ r_\theta \circ t_{-p}.$$

Se f é uma isometria indirecta, então existem $u \in \mathbb{R}^2$ e $\theta \in [0, \pi[$ tais que $f = t_u \circ s_\theta$, onde s_θ é a reflexão na recta $\mathbb{R}(\cos \theta, \sin \theta)$. Neste caso, s_θ tem, como vimos, duas direcções próprias ortogonais de valores próprios associados 1 e -1 . Distinguimos dois casos, consoante u seja ou não colinear com o vector próprio $(-\sin \theta, \cos \theta)$, associado ao valor próprio -1 . Na base $v_1 = (\cos \theta, \sin \theta)$ e $v_2 = (-\sin \theta, \cos \theta)$ a matriz de s_θ é

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

e $u = (\alpha, \beta)$, de modo que

$$f(x^1, x^2) = (x^1 + \alpha, -x^2 + \beta).$$

Se $\alpha = 0$, é claro que a recta de equação $x^2 = \beta/2$ é fixa ponto a ponto por f e que f é a reflexão nesta recta. A reflexão numa recta D será designada por s_D no que segue.

Se $\alpha \neq 0$, a equação $x^1 + \alpha = x^1$ não tem soluções, de modo que f não tem pontos fixos. Note-se que, neste caso, temos

$$f(x^1, x^2) = (x^1, -x^2 + \beta) + (\alpha, 0),$$

de modo que f é composição da reflexão na recta $x^2 = \beta/2$ seguida de uma translação paralelamente a esta recta. Neste caso, usamos a notação $s_{D,u}$ para designar f . Aqui, D é a recta de reflexão e u , paralelo a D , é o vector de translação. Resumindo,

Teorema 1.11. *Sejam f uma isometria e h a transformação ortogonal associada a f . Então:*

(a). *Se $h = 1_{\mathbb{R}^2}$, f é uma translação, isto é, existe um vector u tal que $f = t_u$; neste caso, se $u \neq 0$, f não tem pontos fixos;*

(b). *Se $h \neq 1_{\mathbb{R}^2}$ e $h \in SO(\mathbb{R}^2)$ então existem $p \in \mathbb{R}^2$ e $\theta \in [0, 2\pi[$ tais que $f = r_{\theta,p}$; neste caso p é o único ponto fixo de f ;*

(c). *Se $h \notin SO(\mathbb{R}^2)$ e f tem pontos fixos, então existe uma recta D tal que $f = s_D$;*

(d). Se $h \notin SO(\mathbb{R}^2)$ e f não tem pontos fixos, então existem uma recta D e um vector $u \in \overrightarrow{D}$ tais que $f = t_u \circ s_D$, isto é, $f = s_{D,u}$.

Um resultado que usaremos com alguma frequência mais adiante, é o seguinte

Teorema 1.12. *Sejam f uma isometria, u o vector de f e h a transformação ortogonal associada a f , de modo que $f = t_u \circ h$. Então:*

- (a). $f \circ t_u \circ f^{-1} = t_{h(u)}$;
- (b). Se $u \neq 0$, $f \circ s_{\mathbb{R}u} \circ f^{-1} = s_{\mathbb{R}h(u)}$;
- (c). $f \circ s_{\mathbb{R}u,u} \circ f^{-1} = s_{\mathbb{R}f(u),h(u)}$;
- (d). $f \circ r_{\theta;p} \circ f^{-1} = r_{\varepsilon\theta;f(p)}$, onde $\varepsilon = 1$ se f é uma isometria directa e $\varepsilon = -1$ se f é uma isometria inversa.

DEMONSTRAÇÃO. Temos $f^{-1} = h^{-1} \circ t_{-u}$, de modo que $f^{-1}(x) = h^{-1}(x - u)$ e, como h^{-1} é linear, resulta que $f^{-1}(x) = t_{-h^{-1}(u)} \circ h^{-1}(x)$, isto é

$$f^{-1} = t_{-h^{-1}(u)} \circ h^{-1}.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} f \circ t_u \circ f^{-1}(x) &= f \circ t_u(h^{-1}(x) - h^{-1}(u)) \\ &= f(h^{-1}(x) - h^{-1}(u) + u) \\ &= u + h(h^{-1}(x) - h^{-1}(u) + u) \\ &= u + x - u + h(u) \\ &= x + h(u) \\ &= t_{h(u)}(x), \end{aligned}$$

donde (a). Para provarmos (b), escolhemos uma base ortogonal (w_1, w_2) com $w_1 = h(u)$. Se $x = x^1 w_1 + x^2 w_2$, obtemos

$$\begin{aligned} f \circ s_{\mathbb{R}u} \circ f^{-1}(x) &= f \circ s_{\mathbb{R}u} \circ h^{-1}((x^1 - u^1)w_1 + (x^2 - u^2)w_2) \\ &= f \circ s_{\mathbb{R}u}((x^1 - u^1)u + (x^2 - u^2)v) \end{aligned}$$

onde $v = h^{-1}(w_2)$ e, portanto, é ortogonal a u . Por conseguinte

$$\begin{aligned} f \circ s_{\mathbb{R}u} \circ f^{-1}(x) &= f((x^1 - u^1)u - (x^2 - u^2)v) \\ &= t_u \circ h((x^1 - u^1)u - (x^2 - u^2)v) \\ &= (x^1 - u^1)h(u) - (x^2 - u^2)h(v) + u \\ &= (x^1 - u^1)w_1 - (x^2 - u^2)w_2 + u \\ &= x^1 w_1 - x^2 w_2 \\ &= s_{\mathbb{R}w_1}(x) \\ &= s_{\mathbb{R}h(u)}(x). \end{aligned}$$

Para provarmos (c), consideramos a mesma base ortogonal que no caso anterior, de modo que

$$\begin{aligned}
f \circ s_{\mathbb{R}u,u} \circ f^{-1}(x) &= f((x^1 - u^1 + 1)u - (x^2 - u^2)v) \\
&= t_u \circ h((x^1 - u^1 + 1)u - (x^2 - u^2)v) \\
&= (x^1 - u^1 + 1)h(u) - (x^2 - u^2)h(v) + u \\
&= x^1 w_1 - x^2 w_2 + h(u) \\
&= t_{h(u)} s_{\mathbb{R}h(u)}(x) \\
&= s_{\mathbb{R}h(u),h(u)}(x).
\end{aligned}$$

Para provarmos (d) reparemos que, para $x \in \mathbb{R}^2$ temos

$$\begin{aligned}
f \circ r_{\theta;p} \circ f^{-1}(x) &= t_u \circ h \circ t_p \circ r_\theta \circ t_{-p} \circ h^{-1}(x - u) \\
&= t_u \circ h \circ t_p \circ r_\theta(h^{-1}(x - u) - p) \\
&= t_u \circ h \circ t_p \circ r_\theta(h^{-1}(x) - h^{-1}(u) - p) \\
&= t_u \circ h \circ t_p(r_\theta \circ h^{-1}(x) - r_\theta \circ h^{-1}(u) - r_\theta(p)) \\
&= t_u \circ h(r_\theta \circ h^{-1}(x) - r_\theta \circ h^{-1}(u) - r_\theta(p) + p) \\
&= t_u(h \circ r_\theta \circ h^{-1}(x) - h \circ r_\theta \circ h^{-1}(u) - h \circ r_\theta(p) + h(p)) \\
&= h \circ r_\theta \circ h^{-1}(x) - h \circ r_\theta \circ h^{-1}(u) - h \circ r_\theta(p) + h(p) + u \\
&= t_{-h \circ r_\theta \circ h^{-1}(u) - h \circ r_\theta(p) + h(p) + u} \circ (h \circ r_\theta \circ h^{-1})(p).
\end{aligned}$$

Esta relação mostra que a transformação ortogonal associada a $f \circ r_{\theta;p} \circ f^{-1}$ é $h \circ r_\theta \circ h^{-1}$, donde resulta que $f \circ r_{\theta;p} \circ f^{-1}$ é uma isometria directa. De facto, temos $\det(h \circ r_\theta \circ h^{-1}) = \det h \cdot \det r_\theta \cdot \det h^{-1} = \det r_\theta = 1$. Se h é uma rotação, usando o facto de $SO(\mathbb{R}^2)$ ser comutativo, concluímos que $h \circ r_\theta \circ h^{-1} = h \circ h^{-1} \circ r_\theta = r_\theta$. Se $h \notin SO(\mathbb{R}^2)$, então h é a reflexão numa recta $\mathbb{R}z$. Escolhemos uma base ortogonal (z_1, z_2) com $z_1 = z$. Temos então, nesta base

$$\begin{aligned}
h \circ r_\theta \circ h^{-1}(a^1 z_1 + a^2 z_2) &= h \circ r_\theta(a^1 z_1 - a^2 z_2) \\
&= h \circ (a^1 r_\theta(z_1) - a^2 r_\theta(z_2)) \\
&= h \circ (a^1(\cos \theta z_1 + \sin \theta z_2) - a^2(-\sin \theta z_1 + \cos \theta z_2)) \\
&= h \circ ((a^1 \cos \theta + a^2 \sin \theta)z_1 + (a^1 \sin \theta - a^2 \cos \theta)z_2) \\
&= (a^1 \cos \theta + a^2 \sin \theta)z_1 - (a^1 \sin \theta - a^2 \cos \theta)z_2 \\
&= r_{-\theta}(a^1 z_1 + a^2 z_2),
\end{aligned}$$

donde tiramos que $h \circ r_\theta \circ h^{-1} = r_{\varepsilon\theta}$. Note-se, agora, que p sendo o ponto fixo de $r_{\theta;p}$, temos

$$f \circ r_{\theta;p} \circ f^{-1}(f(p)) = f \circ r_{\theta;p}(p) = f(p),$$

o que mostra que $f(p)$ é o ponto fixo de $f \circ r_{\theta;p} \circ f^{-1}$. Concluímos que

$$f \circ r_{\theta;p} \circ f^{-1} = r_{\varepsilon\theta, f(p)},$$

donde (d) e o teorema. \square

Antes de entrarmos na questão central deste capítulo, a determinação dos subgrupos discretos do grupo das isometrias, consideramos o problema da determinação dos subgrupos finitos do grupo ortogonal.

3. Subgrupos Finitos de $O(\mathbb{R}^2)$

Naturalmente, um subgrupo G de $O(\mathbb{R}^2)$ é finito se tiver um número finito de elementos. Se G é um tal subgrupo, definimos $G_+ = G \cap SO(\mathbb{R}^2)$. Uma vez que $SO(\mathbb{R}^2)$ é um subgrupo de $O(\mathbb{R}^2)$, é claro que G_+ é um subgrupo finito de $SO(\mathbb{R}^2)$. Assim, vamos, primeiro, considerar o problema da determinação dos subgrupos finitos de $SO(\mathbb{R}^2)$. Seja, pois, H um subgrupo finito de $SO(\mathbb{R}^2)$ e seja m o seu cardinal. Podemos então escrever que $H = \{1_{\mathbb{R}^2}, r_{\theta_1}, \dots, r_{\theta_{m-1}}\}$ onde procedemos já à ordenação $0 < \theta_1 < \theta_2 < \dots < \theta_{m-1}$. Como $r_{\theta_i} \circ r_{\theta_i} = r_{2\theta_i}$ e, mais geralmente,

$$\underbrace{r_{\theta_i} \circ \dots \circ r_{\theta_i}}_{k \text{ vezes}} = r_{k\theta_i},$$

é claro que, para todo o inteiro k e todo o inteiro $1 \leq i \leq m-1$, temos $r_{k\theta_i} \in H$. Escolhamos um dos ângulos θ_j com $2 \leq j \leq m-1$. Como $\theta_1 < \theta_j$ existe um inteiro $l \geq 1$ tal que $l\theta_1 < \theta_j \leq (l+1)\theta_1$. Suponhamos que $\theta_j < (l+1)\theta_1$. Então $\theta_j - l\theta_1 < \theta_1$. Ora $r_{\theta_j - l\theta_1} = r_{\theta_j} \circ (r_{l\theta_1})^{-1} \in H$, o que é absurdo, em virtude da definição de θ_1 . Concluimos que θ_j é um múltiplo inteiro de θ_1 . Isto é, os elementos de H fazem parte da lista $r_{k\theta_1}$, $k \in \mathbf{Z}$. Como, por outro lado, todos os elementos desta lista fazem parte de H , temos $H = \{r_{k\theta_1} : k \in \mathbf{Z}\}$. Este facto mostra que a aplicação $\sigma : k \mapsto r_{k\theta_1}$ é um morfismo sobrejectivo do grupo aditivo \mathbf{Z} sobre H . Resulta que $\ker \sigma$ é um subgrupo de \mathbf{Z} . Mas é conhecido que um subgrupo de \mathbf{Z} é da forma $n\mathbf{Z}$ para algum $n \in \mathbf{Z}$. Concluimos da sobrejectividade de σ que H é isomorfo ao grupo quociente $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$, para algum $n \in \mathbf{Z}$. O facto de H ter m elementos implica que $n = m$ e a estrutura do grupo $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ implica então que $m\theta_1 = 2\pi$. Concluimos que

Teorema 1.13. *Se H é um subgrupo finito de $SO(\mathbb{R}^2)$ e o seu cardinal é m , então H é isomorfo ao grupo cíclico a m elementos $\mathbf{Z}/m\mathbf{Z}$ e*

$$H = \left\{ r_{\frac{2\pi}{m}k} : k = 0, \dots, m-1 \right\}.$$

Passamos agora ao caso de $O(\mathbb{R}^2)$. Se G é um subgrupo finito de $O(\mathbb{R}^2)$ e $G_+ = G \cap SO(\mathbb{R}^2)$, então G_+ é um subgrupo finito de $SO(\mathbb{R}^2)$ e, portanto, existe um inteiro m tal que G_+ seja isomorfo ao grupo cíclico $\mathbf{Z}/m\mathbf{Z}$. Se $G_+ = G$, não há nada a acrescentar, pelo que consideramos apenas o caso em que $G \setminus G_+ \neq \emptyset$. Neste caso, existe $s \in G \setminus G_+$. Em particular, s é uma reflexão. Se s' é uma outra reflexão pertencente a $G \setminus G_+$, consideremos a transformação $s \circ s'$. Trata-se de um elemento de G e, como $\det(s \circ s') = \det s \cdot \det s' = 1$, temos mesmo $s \circ s' \in G_+$. Pondo $r = s \circ s'$ e usando o facto de termos $s^{-1} = s$, concluimos que $s' = s \circ r$. Assim, toda a reflexão pertencente a G obtém-se compondo a reflexão s com uma rotação $r \in G_+$. Consideremos a

aplicação $\mu : G_+ \longrightarrow G \setminus G_+$ dada por $\mu(r) = s \circ r$. Trata-se, evidentemente, de uma bijecção, pelo que $G \setminus G_+$ tem mesmo cardinal que G_+ . Em particular, deduzimos que $\#G = 2m$. Mas podemos mesmo ir mais longe. Para isso, consideramos a aplicação $\rho : \{-1, 1\} \times \mathbf{Z}/m\mathbf{Z} \longrightarrow G$ dada por

$$\begin{aligned}\rho(1, k) &= r_{\frac{2\pi}{m}k}, \\ \rho(-1, k) &= s \circ r_{\frac{2\pi}{m}k}.\end{aligned}$$

Trata-se de uma bijecção, pelo que acabamos de ver. Consideremos $\{-1, 1\} \times \mathbf{Z}/m\mathbf{Z}$ com a sua estrutura de grupo produto, dada, portanto, por

$$(a, k) \bullet (b, l) = (a \times b, (k + l) \bmod m).$$

Verificamos, sem dificuldade que ρ é um isomorfismo de grupos. Assim,

Teorema 1.14. *Se G é um subgrupo finito de $O(\mathbb{R}^2)$ e contém pelo menos uma reflexão, então existe um inteiro m tal que $\#G = 2m$ e G é isomorfo ao grupo diedral $\{-1, 1\} \times \mathbf{Z}/m\mathbf{Z}$.*

4. Grupos Discretos de Isometrias - Generalidades

Os grupos discretos de isometrias do plano euclidiano são, como veremos, os grupos de simetria de certas figuras ou padrões "regulares" do plano euclidiano.

O facto dos grupos serem discretos permite-nos escolher em cada grupo vectores de comprimento mínimo e ângulos de amplitude mínima e, a partir daí, fazer a classificação dos grupos discretos.

Naturalmente, começamos pela

Definição 1.3. *Dizemos que um subgrupo G do Grupo $\mathfrak{I}(\mathbb{R}^2)$ é discreto se para todo o ponto $p \in \mathbb{R}^2$, o conjunto $\mathcal{O}_p = \{g(p) : g \in G\}$ é um subconjunto discreto de \mathbb{R}^2 para a topologia natural.*

Recorde-se que $X \subset \mathbb{R}^2$ é discreto se para todo $q \in X$ existe um real $\varepsilon > 0$ tal que, se

$$B(q, \varepsilon) = \{x \in \mathbb{R}^2 : \|x - q\| < \varepsilon\},$$

designa a bola aberta de centro q e raio ε , então $B(q, \varepsilon) \cap X = \{q\}$. Evidentemente, se G é finito, então G é discreto, pois o conjunto \mathcal{O}_p é finito, qualquer que seja $p \in \mathbb{R}^2$. Se $u \in \mathbb{R}^2$, o conjunto $\mathfrak{T}_u = \{t_{mu} : m \in \mathbf{Z}\}$ é um subgrupo discreto de $\mathfrak{I}(\mathbb{R}^2)$. De facto, temos, para quaisquer $m, n \in \mathbf{Z}$, $m \neq n$, e qualquer $p \in \mathbb{R}^2$, $\|t_{mu}(p) - t_{nu}(p)\| > \|u\|/2$, pois

$$\|t_{mu}(p) - t_{nu}(p)\| = \|(m - n)u\| \geq \|u\|.$$

Da mesma forma, se $u, v \in \mathbb{R}^2$ são linearmente independentes, o conjunto $\mathfrak{T}_{u,v} = \{t_{mu+nv} : m, n \in \mathbf{Z}\}$ é um subgrupo discreto de $\mathfrak{I}(\mathbb{R}^2)$, pois para quaisquer $m, n, m', n' \in \mathbf{Z}$ com $m \neq m'$ ou $n \neq n'$ e qualquer $p \in \mathbb{R}^2$,

$$\|t_{mu+nv}(p) - t_{m'u+n'v}(p)\| > \min(\|u\|, \|v\|, \|u + v\|, \|u - v\|)/3.$$

Seguindo o mesmo tipo de estratégia que a que seguimos para a determinação dos subgrupos finitos de $O(\mathbb{R}^2)$, vamos primeiro concentrar-nos no

estudo dos subgrupos discretos de $\mathfrak{I}_+(\mathbb{R}^2)$, o subgrupo de $\mathfrak{I}(\mathbb{R}^2)$ formado pelas isometrias directas. A razão é do mesmo tipo que nesse caso. De facto, se G é um grupo discreto de $\mathfrak{I}(\mathbb{R}^2)$, então $G_+ = G \cap \mathfrak{I}_+(\mathbb{R}^2)$ é um subgrupo discreto de $\mathfrak{I}_+(\mathbb{R}^2)$.

No entanto, antes de considerarmos este caso particular, convém fazermos algumas observações válidas para qualquer subgrupo discreto de $\mathfrak{I}(\mathbb{R}^2)$. Em primeiro lugar, se G é um subgrupo de $\mathfrak{I}(\mathbb{R}^2)$ seja $\mathfrak{T}_G = \mathfrak{T}(\mathbb{R}^2) \cap G$. \mathfrak{T}_G é o conjunto das translações pertencentes a G . Como $\mathfrak{T}(\mathbb{R}^2)$ e G são grupos, é claro que \mathfrak{T}_G é um subgrupo de G . Temos, então, o seguinte

Teorema 1.15. *Se G é um subgrupo discreto de $\mathfrak{I}(\mathbb{R}^2)$ então \mathfrak{T}_G é, igualmente, um subgrupo discreto de $\mathfrak{I}(\mathbb{R}^2)$ e uma das seguintes situações tem lugar:*

- (a). $\mathfrak{T}_G = \{1_{\mathbb{R}^2}\}$;
- (b). Existe um vector $u \neq 0$ tal que $\mathfrak{T}_G = \mathfrak{T}_u$;
- (c). Existem vectores u e v linearmente independentes tais que $\mathfrak{T}_G = \mathfrak{T}_{u,v}$.

DEMONSTRAÇÃO. A primeira asserção é evidente. Suponhamos que $\mathfrak{T}_G \neq \{1_{\mathbb{R}^2}\}$, de modo que \mathfrak{T}_G contém pelo menos uma translação não trivial. Então existe um vector $u \neq 0$ tal que $t_u \in \mathfrak{T}_G$. Como

$$\underbrace{t_u \circ \dots \circ t_u}_{k \text{ vezes}} = t_{ku}$$

e $t_u^{-1} = t_{-u}$, resulta que $\mathfrak{T}_u \subseteq \mathfrak{T}_G$. Se $\mathfrak{T}_G \neq \mathfrak{T}_u$ temos dois casos a considerar. O primeiro caso é aquele em que qualquer vector v tal que $t_v \in \mathfrak{T}_G$ e $t_v \notin \mathfrak{T}_u$ é colinear com u . O segundo é aquele em que existe um vector v linearmente independente de u e tal que $t_v \in \mathfrak{T}_G$ e $t_v \notin \mathfrak{T}_u$. No primeiro caso, consideremos o conjunto

$$Z = \{\lambda \in \mathbb{R} : t_{\lambda u} \in \mathfrak{T}_G\}.$$

Trata-se evidentemente de um subgrupo do grupo aditivo dos reais. De facto, se $\alpha, \beta \in Z$ então $t_{\alpha u}, t_{\beta u} \in \mathfrak{T}_G$ e, portanto, $t_{-\beta u} = t_{\beta u}^{-1} \in \mathfrak{T}_G$ e $t_{(\alpha-\beta)u} = t_{\alpha u} \circ t_{-\beta u} \in \mathfrak{T}_G$, de modo que $\alpha - \beta \in Z$. A aplicação $\xi : Z \rightarrow \mathfrak{T}_G$ dada por $\xi(\lambda) = t_{\lambda u}$ é evidentemente um morfismo injectivo de grupos. Mas, se $t_v \in \mathfrak{T}_G$ então v é colinear com u e, portanto, $v = \lambda u$ para algum $\lambda \in \mathbb{R}$, de modo que $t_v = \xi(\lambda)$, o que mostra que ξ é sobrejectiva e, portanto, um isomorfismo de grupos. Usando a aplicação $\lambda \mapsto t_{\lambda u}(0)$ vemos que Z é um subconjunto discreto de \mathbb{R} . Em particular, Z é fechado. Concluimos, portanto, que Z é um subgrupo fechado de \mathbb{R} . Se Z_+ designa o conjunto dos elementos de Z que são > 0 , o facto de Z_+ ser fechado implica que $r = \inf Z_+$ é um elemento de Z . Como Z é um subgrupo discreto, podemos afirmar que $r > 0$ e, como Z é um subgrupo, podemos afirmar que $mr \in Z_+$ para todo o inteiro $m > 0$. Suponhamos que existe $\mu \in Z_+$ que não é um múltiplo inteiro de r . Então existe um inteiro $l > 0$ tal que $lr < \mu < (l+1)r$ e temos $0 < \mu - lr < r$ e $\mu - lr \in Z_+$ o que é absurdo. Concluimos que $Z = r\mathbb{Z}$. O isomorfismo ξ definido mais acima mostra então que, se $w = ru$, temos $\mathfrak{T}_G = \{t_{mw} : m \in \mathbb{Z}\}$.

Resta-nos analisar o caso em que, em \mathfrak{T}_G há pelo menos duas translações definidas por vectores linearmente independentes. Neste caso, consideremos o conjunto $Z = \{v : v \neq 0 \text{ e } t_v \in \mathfrak{T}_G\}$ que é um subconjunto discreto (pois $v = t_v(0)$) e, portanto, fechado de \mathbb{R}^2 . Seja $z = \{\|v\| : v \in Z\}$ e $\delta = \inf z$. Se $\delta = 0$, então, por definição, para todo o inteiro $n > 0$ existe $r \in z$ tal que $r < 1/n$, o que contradiz o facto de Z ser discreto. Assim, $\delta > 0$. Por definição, para todo o inteiro $n > 0$, existe $v \in Z$ tal que $|\delta - \|v\|| < 1/n$. Como Z é fechado, resulta que existe $u \in Z$ tal que $\|u\| = \delta$. Como $u \in Z$, $t_u \in \mathfrak{T}_G$ e é claro que $\mathfrak{T}_u \subset \mathfrak{T}_G$ e contém todas as translações de \mathfrak{T}_G cujo vector seja colinear com u . Consideremos, agora $Z' = \{v : t_v \in \mathfrak{T}_G \text{ e } v \notin \mathfrak{T}_u\}$. É claro que Z' é discreto, pois $Z' \subset Z$. Usando então o mesmo argumento que acima, provamos que existe $v \in Z'$ tal que, se $w \in Z'$ então $\|w\| \geq \|v\|$. Repare-se que, por construção $\|u\| \leq \|v\|$. Note-se, ainda, que $\mathfrak{T}_v \subset \mathfrak{T}_G$ e que \mathfrak{T}_v contém todas as translações de \mathfrak{T}_G cujo vector seja colinear com v .

Seja então w um vector não colinear com u , não colinear com v e tal que $t_w \in \mathfrak{T}_G$. O vector w é escolhido de norma mínima entre os vectores colineares com w e que definem translações pertencentes a \mathfrak{T}_G . Como (u, v) é uma base de \mathbb{R}^2 , existem reais únicos a e b tais que $w = au + bv$. Sejam m, n inteiros tais que $m < a \leq m + 1$ e $n < b \leq n + 1$. Estas desigualdades impõem que tanto a como b sejam positivos mas este facto não implica uma perda de generalidade. De facto, se a e b fossem ambos negativos, bastaria trocarmos w por $-w$. Se $a > 0$ e $b < 0$, trocamos v por $-v$. Se $a < 0$ e $b > 0$, trocamos u por $-u$. Suponhamos que $a = m + 1$ e que $b < n + 1$. Temos, então $t_w \circ t_{-mu} \circ t_{-nv} = t_{(b-n)v} \in \mathfrak{T}_G$ e, como $\|(b-n)v\| = |b-n| \cdot \|v\| < \|v\|$, somos conduzidos a um absurdo, pois v é de norma mínima. Se $a < m + 1$ e $b = n$, chegamos igualmente a um absurdo. Finalmente, consideremos o caso em que $a < m + 1$ e $b < n + 1$. Então $t_w \circ t_{-mu} \circ t_{-nv} = t_{(a-m)u + (b-n)v} \in \mathfrak{T}_G$. Esta relação mostra que $(a-m)u + (b-n)v \in Z$ e, não sendo este vector colinear com u , temos $\|(a-m)u + (b-n)v\| \geq \|v\|$. A desigualdade triangular diz-nos que $\|v\| \leq (a-m)\|u\| + (b-n)\|v\|$, donde tiramos que $(1-b+n)\|v\| \leq (a-m)\|u\|$. Ora, $u + v \in Z$ e, portanto, $(u + v) - ((a-m)u + (b-n)v) = (1-a+m)u + (1-b+n)v \in Z$. Mas, como $(1-a+m)u$ e $(1-b+n)v$ não são colineares (cf. T.1.2),

$$\|(1-a+m)u + (1-b+n)v\| < (1-a+m)\|u\| + (1-b+n)\|v\| \leq \|u\|,$$

o que contradiz o facto de u ser de norma mínima entre os elementos de Z , donde o teorema \square

Diremos que um grupo discreto é, respectivamente, de primeiro, segundo ou terceiro tipo, consoante verifique (a), (b) ou (c).

O passo seguinte consiste em analisar o conjunto das transformações ortogonais associadas a elementos de G . Seja pois

$$G_* = \{f \in O(\mathbb{R}^2) : \exists v \in \mathbb{R}^2 \ t_v \circ f \in G\}.$$

G_* é conhecido por grupo pontual de G .

Note-se que $1_{\mathbb{R}^2} \in G_*$, de modo que $G_* \neq \emptyset$. Se $f, g \in G_*$ e $u, v \in \mathbb{R}^2$ são tais que $t_u \circ f, t_v \circ g \in G$, e

$$t_u \circ f \circ t_v \circ g(0) = t_u \circ f(v) = u + f(v) = w,$$

temos

$$t_u \circ f \circ t_v \circ g(x) = t_u \circ f(v + g(x)) = u + f(v) + f(g(x)) = t_w \circ (f \circ g)(x).$$

Como $t_u \circ f \circ t_v \circ g \in G$, esta relação mostra que $f \circ g \in G_*$. Concluimos facilmente que G_* é um subgrupo de $O(\mathbb{R}^2)$. Consideremos agora o conjunto $W = \{v = t_v(0) : t_v \in G\}$. Como vimos atrás, trata-se de um subconjunto discreto do plano. Se $g \in G_*$ e $v \in \mathbb{R}^2$ é tal que $t_v \circ g \in G$, consideremos $u \in W$. Temos

$$\begin{aligned} (t_v \circ g) \circ t_u \circ (t_v \circ g)^{-1}(x) &= t_v \circ g \circ t_u \circ g^{-1}(-v + x) \\ &= t_v \circ g(u - g^{-1}(v) + g^{-1}(x)) \\ &= t_v(g(u) - v + x) \\ &= g(u) + x \\ &= t_{g(u)}(x), \end{aligned}$$

o que prova que $t_{g(u)} \in G$ e, portanto, que $g(u) \in W$. Concluimos que para todo $g \in G_*$, $g(W) \subseteq W$. De facto, temos mesmo $g(W) = W$. De facto, se $w \in W$ e $g \in G_*$, então $g^{-1} \in G_*$ e, portanto, $g^{-1}(w) \in W$. Resulta que $g(g^{-1}(w)) = w \in g(W)$. Resumindo

Teorema 1.16. *Para todo $g \in G_*$ tem-se $g(W) = W$.*

O interesse em considerarmos o subgrupo G_* vem do seguinte

Teorema 1.17. *Se G é um subgrupo discreto de $\mathfrak{J}(\mathbb{R}^2)$ então G_* é um subgrupo finito de $O(\mathbb{R}^2)$.*

DEMONSTRAÇÃO. Vimos, quando da demonstração do T.1.15 que existe um vector $u \in \mathbb{R}^2$ tal que, $t_u \in G$ e se $v \in \mathbb{R}^2$ é tal que $t_v \in G$ então $\|u\| \leq \|v\|$. Consideremos o conjunto $U = \{g(u) : g \in G_* \cap SO(\mathbb{R}^2)\}$. Como $u \in W$, o teorema anterior diz-nos que $U \subset W$ e, portanto, U é discreto. Mas, $\|g(u)\| = \|u\|$ para todo $g \in G_*$, de modo que U é limitado. Assim, U é discreto e limitado. Concluimos que U é finito. Consideremos a aplicação $\mathbf{g} : G_* \cap SO(\mathbb{R}^2) \longrightarrow U$ dada por $\mathbf{g}(g) = g(u)$. Por definição, esta aplicação é sobrejectiva. Suponhamos que $g, h \in G_*$ são tais que $\mathbf{g}(g) = \mathbf{g}(h)$. Temos então $g(u) = h(u)$, isto é $g^{-1} \circ h(u) = u$. Assim, a rotação $g^{-1} \circ h$ tem 1 como valor próprio, o que implica que $g^{-1} \circ h = 1_{\mathbb{R}^2}$ e, portanto, $g = h$. Resulta que \mathbf{g} é bijectiva e, portanto, $G_* \cap SO(\mathbb{R}^2)$ é finito. Se $G_* \cap SO(\mathbb{R}^2) = G_*$, o teorema está demonstrado. Senão, existe $s \in O(\mathbb{R}^2)$ tal que $s \in G_*$ e $s \notin SO(\mathbb{R}^2)$. Se s' é um outro elemento de G_* tal que $s' \notin SO(\mathbb{R}^2)$, temos $s \circ s' = r \in G_* \cap SO(\mathbb{R}^2)$, donde tiramos que $s' = s \circ r$. Deduzimos, como já o tínhamos feito aquando do estudo dos subgrupos finitos de $O(\mathbb{R}^2)$, que G_* é finito, donde o teorema □

Os teoremas 1.15 e 1.17 são instrumentais na determinação dos subgrupos discretos de $\mathfrak{I}(\mathbb{R}^2)$.

5. Subgrupos de Rosáceas e de Frisos

Segundo o T.1.15, o grupo \mathfrak{T}_G é de um de três tipos. O primeiro tipo é aquele em que $\mathfrak{T}_G = \{1_{\mathbb{R}^2}\}$. Neste caso, é imediato que $G = G_*$ e, segundo o T.1.17, G_* é finito. Aplicamos os T.1.13 e T.1.14. Assim, se $\mathfrak{T}_G = \{1_{\mathbb{R}^2}\}$, então G é isomorfo a $\mathbf{Z}/m\mathbf{Z}$, se não contém reflexões e isomorfo a $\{-1, 1\} \times \mathbf{Z}/m\mathbf{Z}$ se contém reflexões, para algum inteiro $m \geq 0$. Estes grupos são conhecidos como grupos das rosáceas ou grupos de Leonardo⁴. Não é difícil verificar que são grupos que preservam um polígono regular (a m lados).

O segundo tipo é aquele em que existe um vector $u \neq 0$ tal que

$$\mathfrak{T}_G = \mathfrak{T}_u = \langle t_u \rangle = \{t_{mu} : m \in \mathbf{Z}\}.$$

Estes subgrupos são chamados subgrupos de frisos.

Para estudarmos estes grupos, introduzimos a seguinte notação. Dado um ponto $p \in \mathbb{R}^2$, O_p designa o conjunto das isometrias que deixam fixo o ponto p . Evidentemente, O_p é um grupo isomorfo a $O(\mathbb{R}^2)$. Da mesma forma, SO_p designa o conjunto das isometrias directas que deixam fixo o ponto p . SO_p é um grupo isomorfo a $SO(\mathbb{R}^2)$. Finalmente, definimos $G_p = O_p \cap G$ e $G_p^+ = SO_p \cap G$.

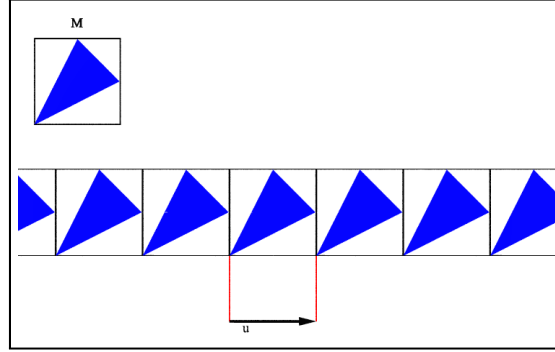
Consideremos, então, os diversos casos possíveis.

Caso 1 - Qualquer que seja $p \in \mathbb{R}^2$, $G_p = \{1_{\mathbb{R}^2}\}$.

Neste caso, segundo o T.1.11, $G \setminus \{1_{\mathbb{R}^2}\}$ contém apenas translações ou reflexões deslizantes. Se apenas contém translações, é claro que $G = \mathfrak{T}_G = \mathfrak{T}_u$. Obtemos uma primeira classe de grupos de frisos, tradicionalmente designada por \mathfrak{F}_1 . $\mathfrak{F}_1 = \langle t_u \rangle$. A imagem seguinte ilustra a forma como um grupo deste tipo age sobre um subconjunto de \mathbb{R}^2 . O subconjunto em causa é designado por motivo.

⁴LeonardoVinci nasceu a 15 de Abril de 1452, na pequena cidade de Vinci, perto de Florença, centro intelectual e científico da Itália. Foi Pintor, escultor, arquitecto e engenheiro, o talento mais versátil da Itália do Renascimento, morreu em 1519.

Conta-se que estudou esta questão, quando confrontado com o problema de acrescentar nichos ou altares em capelas circulares ou poligonais, adjacentes a um núcleo central sem romper a simetria central desse núcleo. Leonardo da Vinci fez um estudo sistemático com vista a estabelecer os métodos óptimos para realizá-lo. Daí o nome.

Acção da classe \mathfrak{F}_1 .

Se G contém uma reflexão deslizante $s_{D,v}$, escolhamos um referencial (p, e_1, e_2) de origem p e base ortonormada (e_1, e_2) , de tal modo que $\vec{D} = IR e_1$ e $p \in D$. Como $v \in \vec{D}$ temos, então $v = \alpha e_1$ para algum $\alpha \in IR$. Neste referencial, temos $s_{D,v} = t_v \circ s_D$, de modo que, para $(x, y) = p + x e_1 + y e_2 \in IR^2$, temos

$$s_{D,v}(x, y) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + \alpha \\ -y \end{pmatrix}.$$

Resulta que

$$s_{D,v} \circ s_{D,v}(x, y) = s_{D,v}(x + \lambda, -y) = (x + 2\lambda, y) = t_{2\alpha e_1}(x, y),$$

de modo que $t_{2\alpha e_1} \in \mathfrak{T}_u$. Concluimos que u é colinear com e_1 , de modo que existe um real μ tal que $u = \mu e_1$. Como $t_{2\alpha e_1} \in \mathfrak{T}_u$, existe um $m \in \mathbf{Z}$ tal que $2\alpha = m\mu$. Note-se, agora, que

$$t_{nu} \circ s_{D,v}(x, y) = t_{nu}(x + \alpha, -y) = (x + \alpha + nu, -y) = s_{D,(\alpha+nu)e_1}(x, y).$$

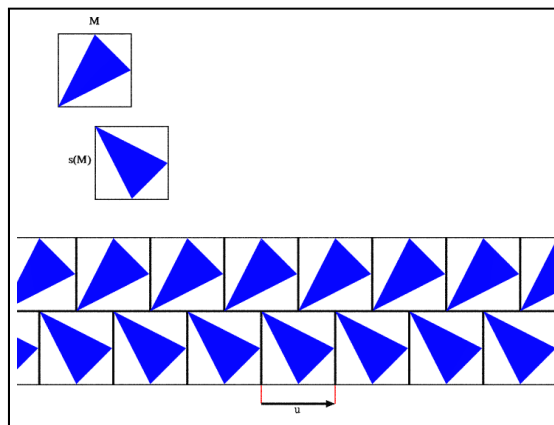
Se m é par, escolhendo $n = -m/2$, esta relação dá-nos $t_{nu} \circ s_{D,v} = s_D$, contradizendo o facto de termos $G_p = \{1_{IR^2}\}$. Assim, m é ímpar e, portanto, existe k tal que $m = 2k + 1$. Neste caso, escolhendo $n = -k$, a relação acima dá-nos $t_{-ku} \circ s_{D,v} = s_{D,(\alpha-k\mu)e_1} = s_{D,\frac{\mu}{2}e_1}$ pois $\alpha - k\mu = \mu/2$. O conjunto $H = \{t_u^m \circ s_{D,\frac{1}{2}u}^k : k, m \in \mathbf{Z}\}$ é um subgrupo discreto de isometrias do plano. De facto, como

$$\begin{aligned} s_{D,\frac{1}{2}u} \circ s_{D,\frac{1}{2}u} &= t_u, \\ s_{D,\frac{1}{2}u} \circ t_{ku} &= s_{D,\frac{2k+1}{2}u} = t_{ku} \circ s_{D,\frac{1}{2}u}, \end{aligned}$$

temos $s_{D,\frac{1}{2}u}^{2k} = t_{ku}$ e $s_{D,\frac{1}{2}u}^{2k+1} = t_{ku} \circ s_{D,\frac{1}{2}u} = s_{D,\frac{2k+1}{2}u}$. Note-se, ainda, que

$$s_{D,\frac{1}{2}u}^{-1} = s_{D,-\frac{1}{2}u}.$$

Obtemos uma segunda classe de grupos de frisos, tradicionalmente designada por \mathfrak{F}_1^3 . $\mathfrak{F}_1^3 = \langle t_u, s_D \rangle$. A imagem seguinte ilustra a acção de um grupo desta classe sobre um motivo do plano. Na imagem, a recta horizontal central é a recta D ao longo da qual se processam as reflexões deslizantes.

Acção da classe \mathfrak{F}_1^3 .

Caso 2 - Existe $p \in \mathbb{R}^2$ tal que $G_p \neq \{1_{\mathbb{R}^2}\}$.

Neste caso, consideramos o subgrupo G_p^+ . Uma primeira possibilidade é que

Caso 2a - $G_p^+ = \{1_{\mathbb{R}^2}\}$.

Neste caso, há elementos de G que fixam pontos do plano, mas, com excepção da identidade, nenhum destes elementos é uma rotação. Resulta do T.1.11 que, então, G_p contém uma reflexão cuja recta contém o ponto p . Para analisarmos este caso, escolhemos um referencial ortonormado de origem no ponto p e cuja base (e_1, e_2) é tal que $u = \lambda e_1$ para algum $\lambda \in \mathbb{R}$. Seja s_D uma reflexão pertencente a G_p tal que $p \in D$ e seja φ o ângulo que a recta D faz com a recta $p + \mathbb{R}u = p + \mathbb{R}e_1$. Então a reflexão s_D é dada, no referencial definido atrás, por

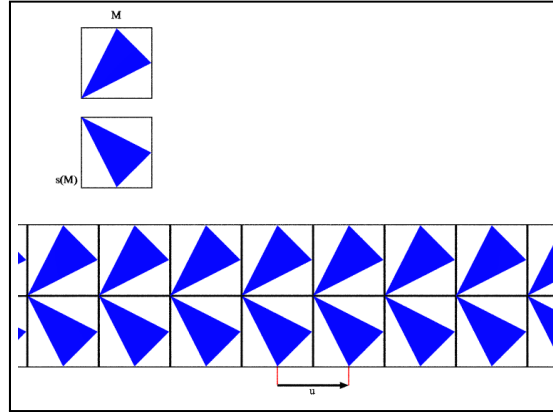
$$s_D(x, y) = \begin{pmatrix} \cos 2\varphi & \sin 2\varphi \\ \sin 2\varphi & -\cos 2\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Temos, então

$$s_D \circ t_u \circ s_D(x, y) = \begin{pmatrix} x + \lambda \cos 2\varphi \\ y + \lambda \sin 2\varphi \end{pmatrix} = t_v(x, y),$$

onde $v = \lambda(\cos 2\varphi, \sin 2\varphi)$. Como $s_D \circ t_u \circ s_D \in G$, concluímos que $t_v \in \mathfrak{T}_u$ e, portanto, $\sin 2\varphi = 0$, o que implica que $\varphi = 0$ ou $\varphi = \pi/2$.

Suponhamos, primeiro, que todas as reflexões são tais que $\varphi = 0$. Então $D = p + \mathbb{R}u$ e $s_D(x, y) = (x, -y)$ e, portanto, $s_D \circ s_D = 1_{\mathbb{R}^2}$ e $t_{mu} \circ s_D = s_D \circ t_{mu}$. Verificamos imediatamente que $H = \{t_u^m \circ s_D^k : m \in \mathbb{Z}, k = 1, 2\}$ é um grupo discreto. Obtemos uma terceira classe de grupos de frisos, tradicionalmente designada por \mathfrak{F}_1^1 . $\mathfrak{F}_1^1 = \langle t_u, s_D \rangle$. A imagem seguinte ilustra a acção de um grupo desta classe sobre um motivo do plano. Na imagem, a recta horizontal central é a recta D . Todos os seus pontos são fixos pelas reflexões do grupo.

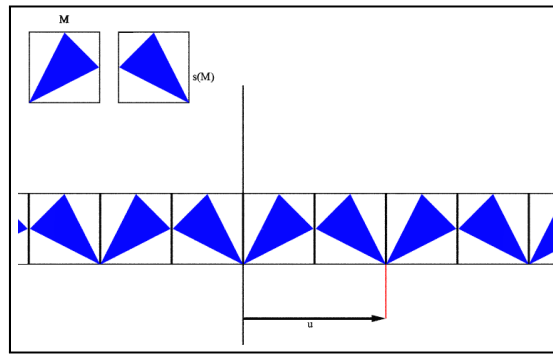


Acção da classe \mathfrak{F}_1^1 .

Suponhamos, agora, que existe uma reflexão s_E em G cuja recta, E , é perpendicular à direcção IRu . Escolhemos, novamente, o ponto p sobre a recta D e a base ortonormada (e_1, e_2) de tal forma que $u = \lambda e_1$ para algum $\lambda \in IR$. Temos, então

$$s_E(x, y) = (-x, y).$$

Como $s_E \circ t_u \circ s_E(x, y) = s_E \circ t_u(-x, y) = s_E(-x + \lambda, y) = (x - \lambda, y) = t_{-u}(x, y)$, temos $t_u \circ s_E = s_E \circ t_{-u}$. Esta relação e $s_E \circ s_E = 1_{IR^2}$ mostram que $H = \{t_u^m \circ s_E^k : m \in \mathbf{Z} \text{ e } k = 1, 2\}$ é um grupo discreto. Obtemos uma terceira classe de grupos de frisos, tradicionalmente designada por \mathfrak{F}_1^2 . $\mathfrak{F}_1^2 = \langle t_u, s_{D'} \rangle$. A imagem seguinte ilustra a acção de um grupo desta classe sobre um motivo do plano. Na imagem, a recta vertical é a recta D' . Todos os seus pontos são fixos pelas reflexões do grupo.



Acção da classe \mathfrak{F}_1^2 .

Pelo que acabamos de ver, quando existe $p \in IR^2$ tal que $G_p \neq \{1_{IR^2}\}$ e $G_p^+ = \{1_{IR^2}\}$, obtemos duas classes de grupos, a saber as classes \mathfrak{F}_1^1 e \mathfrak{F}_1^2 , que juntamos às duas classes \mathfrak{F}_1 e \mathfrak{F}_1^3 correspondentes ao caso $G_p = \{1_{IR^2}\}$ para todo $p \in IR^2$. Ambas as listas são exaustivas, em virtude do teorema de classificação das isometrias.

Caso 2b - $G_p^+ \neq \{1_{IR^2}\}$.

Neste caso, o grupo G contém uma rotação $r_{\theta,p}$ em torno do ponto p . Escolhemos o referencial ortonormado com origem em p e com a base ortonormada

(e_1, e_2) de tal forma que $u = \lambda e_1$. Neste referencial, a rotação $r_{\theta,p}$ é dada por

$$r_{\theta,p}(x, y) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Um cálculo simples mostra que

$$r_{\theta,p} \circ t_u \circ r_{-\theta,p}(x, y) = t_{\lambda(\cos \theta, \sin \theta)}(x, y),$$

de modo que, como $r_{\theta,p} \circ t_u \circ r_{-\theta,p} \in G$, concluímos que $\lambda(\cos \theta, \sin \theta)$ é colinear com u . Resulta que $\sin \theta = 0$ e, portanto, $\theta = 0$ ou $\theta = \pi$. Evidentemente, interessa-nos apenas o caso $\theta = \pi$, pois o caso restante corresponde à identidade. Assim, temos que $r_{\pi,p} \in G$ e, no referencial que estamos a usar,

$$r_{\pi,p}(x, y) = (-x, -y).$$

Um cálculo simples mostra que temos

$$t_{mu} \circ r_{\pi,p} = r_{\pi,p} \circ t_{-mu},$$

de modo que, como $r_{\pi,p} \circ r_{\pi,p} = 1_{\mathbb{R}^2}$, o conjunto

$$H = \{t_u^m \circ r_{\pi,p}^i : m \in \mathbf{Z}, i = 1, 2\}$$

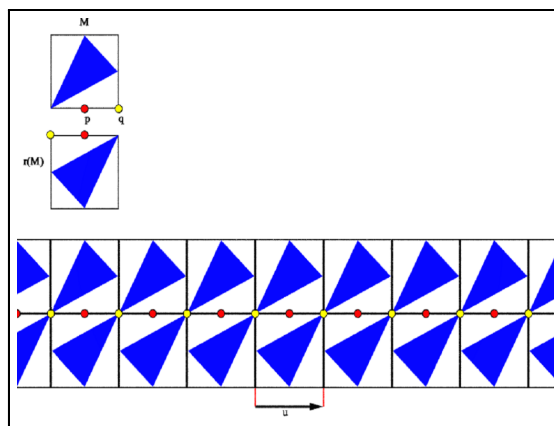
é um grupo discreto. Os grupos deste tipo são designados pela sigla \mathfrak{F}_2 . $\mathfrak{F}_2 = \langle t_u, H_p \rangle$. Onde H_p representa a meia volta de centro em p , isto é $r_{\pi,p}$. Se $p_m = p + mu$, $m \in \mathbf{Z}$, então

$$r_{\pi,p_m}(x, y) = r_{\pi}(x - m\lambda, y) + (m\lambda, 0) = (-x + 2m\lambda, -y) = t_{2mu} \circ r_{\pi,p}(x, y),$$

de modo que $r_{\pi,p_m} \in H$. Da mesma forma, se $q_m = p + (m/2)u$,

$$\begin{aligned} r_{\pi,q_m}(x, y) &= r_{\pi}(x - \frac{m}{2}\lambda, y) + (\frac{m}{2}\lambda, 0) \\ &= (-x + m\lambda, -y) \\ &= t_{mu} \circ r_{\pi,p}(x, y), \end{aligned}$$

de modo que $r_{\pi,q_m} \in H$. A imagem seguinte ilustra a acção desta classe de grupos. os pontos a vermelho são os pontos p_m e os pontos a amarelo os pontos q_m .



Acção da classe \mathfrak{F}_2 .

O facto de G conter a rotação $r_{\pi,p}$ não exclui a possibilidade de conter reflexões. Segundo o T.1.11, temos dois casos a analisar, consoante a reflexão em causa seja a reflexão numa recta ou uma reflexão deslizante. Em qualquer dos casos, o grupo G conterá, sempre, como subgrupo, um grupo do tipo \mathfrak{F}_2 . Podemos, portanto, operar no referencial ortonormado descrito atrás, com

$$\begin{aligned} t_{mu}(x, y) &= (x + m\lambda, y), \\ r_{\pi,p}(x, y) &= (-x, -y). \end{aligned}$$

Suponhamos, portanto, que G contém a reflexão s_D numa recta D . Como vimos atrás, o ângulo φ de D com IRu só pode ser $\varphi = 0$ ou $\varphi = \pi/2$. Seja $q = (q^1, q^2)$ um ponto da recta D .

Se $\varphi = 0$, temos

$$s_D(x, y) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x - q^1 \\ y - q^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} q^1 \\ q^2 \end{pmatrix} = (x, -y + 2q^2).$$

Neste caso,

$$\begin{aligned} r_{\pi,p} \circ s_D \circ r_{\pi,p} \circ s_D(x, y) &= s_D \circ r_{\pi,p}(x, -y + 2q^2) \\ &= r_{\pi,p} \circ s_D(-x, +y - 2q^2) \\ &= r_{\pi,p} \circ (-x, -y + 4q^2) \\ &= (x, y - 4q^2) \end{aligned}$$

de modo que $r_{\pi,p} \circ s_D \circ r_{\pi,p} \circ s_D = t_{(0, -4q^2)}$. Resulta que $q^2 = 0$, pois $\mathfrak{T}_G = \mathfrak{T}_u$. Assim, $D = p + IRu$, ou seja, s_D é a reflexão na recta fixa por \mathfrak{T}_u e $r_{\pi,p}$. No referencial ortonormado que temos vindo a utilizar, temos

$$s_D(x, y) = (x, -y).$$

Note-se que $s_D \circ s_D = 1_{\mathbb{R}^2} = r_{\pi,p} \circ r_{\pi,p}$. Temos, também

$$r_{\pi,p} \circ s_D(x, y) = r_{\pi,p}(x, -y) = (-x, y) = s_D(-x, -y) = s_D \circ r_{\pi,p}(x, y),$$

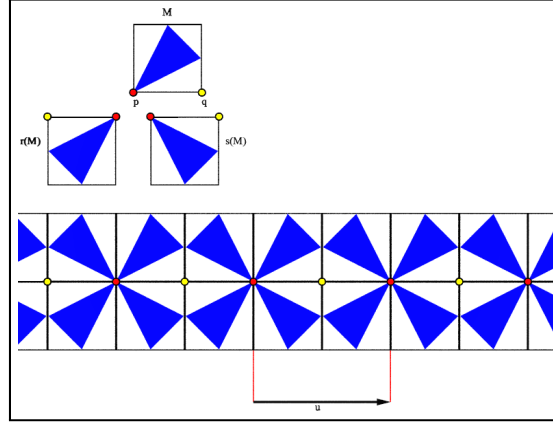
de modo que $r_{\pi,p} \circ s_D = s_D \circ r_{\pi,p}$. Temos, ainda,

$$s_D \circ t_u(x, y) = s_D(x + \lambda, y) = (x + \lambda, -y) = t_u \circ s_D(x, y).$$

e

$$r_{\pi,p} \circ s_D \circ r_{\pi,p} = r_{\pi,p} \circ r_{\pi,p} \circ s_D = s_D.$$

Estas relações mostram que $H = \{t_u^m \circ r_{\pi,p}^j \circ s_D^k : m \in \mathbf{Z}, j, k = 1, 2\}$ é um grupo discreto. Designamos esta classe de grupos pela sigla \mathfrak{F}_2^1 . $\mathfrak{F}_2^1 = \langle t_u, H_p, s_D \rangle$. A seguinte imagem mostra como este grupo age sobre um motivo de \mathbb{R}^2 .

Acção da classe \mathfrak{F}_2^1 .

Note-se que $r_{\pi,p} \circ s_D \in G$ é uma reflexão numa recta perpendicular à recta $p + IRu$. Assim, os grupos desta classe contêm reflexões em rectas perpendiculares à recta $p + IRu$. Contêm, também, as reflexões com deslocamento $t_{mu} \circ s_D$. Por conseguinte, consideramos, agora, o caso em que G contém reflexões em rectas perpendiculares a $p + IRu$, mas não contém reflexões na recta $p + IRu$. Se $s_E \in G$ é uma reflexão numa recta E perpendicular a $p + IRu$ e q é o ponto de intersecção desta recta com E , de modo que $q = p + \mu e_1$, então, no referencial que estamos a usar, temos

$$s_E(x, y) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x - \mu \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mu \\ 0 \end{pmatrix} = (-x + 2\mu, y).$$

Temos, então

$$\begin{aligned} r_{\pi,p} \circ t_{mu} \circ s_E(x, y) &= r_{\pi,p} \circ t_{mu}(-x + 2\mu, y) \\ &= r_{\pi,p}(-x + 2\mu + m\lambda, y) \\ &= (x - 2\mu - m\lambda, -y) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} s_E \circ r_{\pi,p} \circ s_E \circ r_{\pi,p}(x, y) &= s_E \circ r_{\pi,p} \circ s_E(-x, -y) \\ &= s_E \circ r_{\pi,p}(x + 2\mu, -y) \\ &= s_E(-x - 2\mu, +y) \\ &= t_{4\mu e_1}(x, y). \end{aligned}$$

Como $s_E \circ r_{\pi,p} \circ s_E \circ r_{\pi,p} \in G$ concluímos desta última relação que existe um inteiro k tal que $4\mu = k\lambda$. Substituindo na primeira relação, obtemos

$$r_{\pi,p} \circ t_{mu} \circ s_E(x, y) = \left(x - \left(\frac{k}{2} + m\right)\lambda, -y\right).$$

Se k é par e $k = 2n$, resulta que $r_{\pi,p} \circ t_{-nu} \circ s_E(x, y) = (x, -y)$ é a reflexão na recta $p + IRu$, contradizendo a nossa hipótese. Assim, k é ímpar e, escrevendo

que $k = 2n + 1$, temos

$$r_{\pi,p} \circ t_{-nu} \circ s_E(x, y) = \left(x - \left(\frac{2n+1}{2} - n\right)\lambda, -y\right) = \left(x - \frac{1}{2}\lambda, -y\right) = s_{D, -\frac{1}{2}u}(x, y).$$

Como

$$s_{D, \frac{1}{2}u} \circ s_{D, \frac{1}{2}u}(x, y) = s_{D, \frac{1}{2}u}\left(x - \frac{1}{2}\lambda, -y\right) = (x - \lambda, y) = t_{-u}(x, y),$$

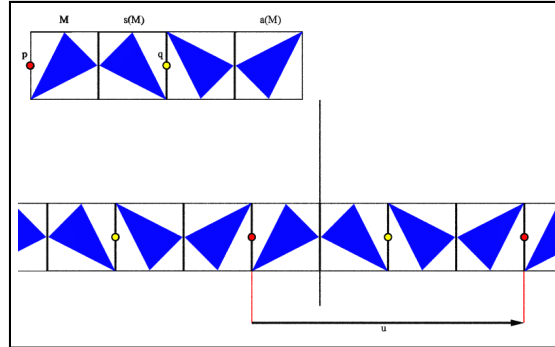
temos

$$s_E(x, y) = \left(-x + 2\frac{2n+1}{4}\lambda, y\right) = \left(-x + n\lambda + \frac{1}{2}\lambda, y\right) = t_{nu} \circ s_F(x, y),$$

onde

$$s_F(x, y) = \left(-x + \frac{1}{2}\lambda, y\right)$$

é a reflexão na recta perpendicular a $p + IRu$ que passa pelo ponto $r = p + \frac{\lambda}{4}u$. Note-se que, como $s_F = t_{-nu} \circ s_E$, temos $s_F \in G$. O conjunto $\{t_u^m \circ r_{\pi,p}^j \circ s_F^k : m \in \mathbf{Z}, j, k = 1, 2\}$ é um grupo discreto. Os grupos deste tipo são designados pela sigla \mathfrak{F}_2^2 . $\mathfrak{F}_2^2 = \langle t_u, H_p, s_{D'} \rangle$. A sua acção sobre um motivo do plano está representada na imagem seguinte (a é a rotação em torno do ponto amarelo).



Acção da classe \mathfrak{F}_2^2 .

Podemos enunciar o

Teorema 1.18. *Se G é um grupo discreto de isometrias do plano euclidiano e $\mathfrak{T}_G = \mathfrak{T}_u$ para algum vector $u \neq 0$, então G pertence a uma das sete classes seguintes:*

(a). $G \in \mathfrak{F}_1$ se para todo o ponto $p \in IR^2$, $G \cap O_p = \{1_{IR^2}\}$ e G não contém reflexões deslizantes. Neste caso, $G = \mathfrak{T}_u$;

(b). $G \in \mathfrak{F}_1^3$ se para todo o ponto $p \in IR^2$, $G \cap O_p = \{1_{IR^2}\}$ e G contém reflexões deslizantes. Neste caso existe uma reflexão com deslocamento $s \in G$ tal que $s \circ s = t_u$ e G é o grupo gerado por esta reflexão deslizante, isto é $G = \{s^m : m \in \mathbf{Z}\}$;

(c). $G \in \mathfrak{F}_1^1$ se existe um ponto $p \in IR^2$ tal que $G \cap O_p \neq \{1_{IR^2}\}$, G não contém rotações e as reflexões pertencentes a G têm direcção paralela a IRu ; neste caso, existe uma recta D paralela a IRu tal que G é gerado por t_u e s_D , isto é $G = \{t_u^m \circ s_D^j : m \in \mathbf{Z}, j = 1, 2\}$;

(d). $G \in \mathfrak{F}_1^2$ se existe um ponto $p \in \mathbb{R}^2$ tal que $G \cap O_p \neq \{1_{\mathbb{R}^2}\}$, G não contém rotações e G contém reflexões pertencentes de direcção perpendicular a IRu ; neste caso, existe uma recta E perpendicular a IRu tal que G é gerado por t_u e s_E , isto é $G = \{t_u^m \circ s_E^j : m \in \mathbf{Z}, j = 1, 2\}$;

(e). $G \in \mathfrak{F}_2$ se existe um ponto $p \in \mathbb{R}^2$ tal que $G \cap SO_p \neq \{1_{\mathbb{R}^2}\}$ e G não contém reflexões; neste caso, as rotações próprias pertencentes a G são rotações de ângulo π . G é gerado por t_u e $r_{\pi,p}$, isto é $G = \{t_u^m \circ r_{\pi,p}^j : m \in \mathbf{Z}, j = 1, 2\}$;

(f). $G \in \mathfrak{F}_2^1$ se existe um ponto $p \in \mathbb{R}^2$ tal que $G \cap SO_p \neq \{1_{\mathbb{R}^2}\}$ e G contém reflexões de direcção IRu . Neste caso, G contém uma reflexão na recta $D = p + IRu$ e $G = \{t_u^m \circ r_{\pi,p}^j \circ s_D^k : m \in \mathbf{Z}, j, k = 1, 2\}$;

(g). $G \in \mathfrak{F}_2^2$ se existe um ponto $p \in \mathbb{R}^2$ tal que $G \cap SO_p \neq \{1_{\mathbb{R}^2}\}$, G contém reflexões mas não contém reflexões de direcção IRu . Neste caso, G contém a reflexão numa recta F que passa pelo ponto $r = p + \frac{\lambda}{4}u$ e é perpendicular a $p + IRu$ e $G = \{t_u^m \circ r_{\pi,p}^j \circ s_F^k : m \in \mathbf{Z}, j, k = 1, 2\}$.

6. Subgrupos de Padrões

Terminamos a questão da determinação dos subgrupos discretos de isometrias do plano euclidiano considerando o último caso referido no T.1.15(c). Trata-se do caso em que o grupo \mathfrak{T}_G é gerado por duas translações de direcções linearmente independentes. Isto é, existem vectores u, v linearmente independentes tais que

$$\mathfrak{T}_G = \langle t_u, t_v \rangle = \{t_{mu+nv} : m, n \in \mathbf{Z}\}.$$

Dado $p \in \mathbb{R}^2$, seja $R_{G,p} = \{p + mu + nv : m, n \in \mathbf{Z}\}$. Dizemos que $R_{G,p}$ é a rede centrada em p associada a G .

Naturalmente, podemos supôr que $\|u\| \leq \|v\|$. Da escolha feita acima, resulta que u é de norma mínima entre os vectores w tais que $t_w \in \mathfrak{T}_G$. Em tudo o que segue, os referenciais ortonormados utilizados, salvo menção expressa do contrário, serão escolhidos de tal forma que as suas bases, (e_1, e_2) são tais que $u = \lambda e_1$ para algum $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda > 0$. Trocando v por $-v$, se necessário fôr, podemos assumir que $v = \alpha e_1 + \beta e_2$ com $\alpha \geq 0$. A base (e_1, e_2) sendo ortonormada, temos, então

$$\begin{aligned} \|u\| &= \lambda, \quad \|v\| = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}, \\ \|u - v\| &= \sqrt{(\lambda - \alpha)^2 + \beta^2}, \\ \|u + v\| &= \sqrt{(\lambda + \alpha)^2 + \beta^2}. \end{aligned}$$

Das condições impostas aos vectores u e v tiramos que $\|u\| \leq \|v\|$ e (cf. demonstração do T.1.15), v é de norma mínima entre os vectores w não colineares com u e tais que $t_w \in \mathfrak{T}_G$. Consequentemente, $\|v\| \leq \|u - v\|$. Como

$$\begin{aligned} \|u - v\|^2 &= \lambda^2 + \alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha\lambda, \\ \|u + v\|^2 &= \lambda^2 + \alpha^2 + \beta^2 + 2\alpha\lambda, \end{aligned}$$

as condições impostas a α e λ mostram que $\|u - v\| \leq \|u + v\|$, de modo que temos

$$\|u\| \leq \|v\| \leq \|u - v\| \leq \|u + v\|.$$

Usando as expressões de u e v na base (e_1, e_2) esta relação lê-se

$$\lambda^2 \leq \alpha^2 + \beta^2 \leq \lambda^2 + \alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha\lambda \leq \lambda^2 + \alpha^2 + \beta^2 + 2\alpha\lambda$$

e conduz-nos, naturalmente, a considerar diversos casos. À priori, temos oito casos a considerar, de acordo com o seguinte quadro:

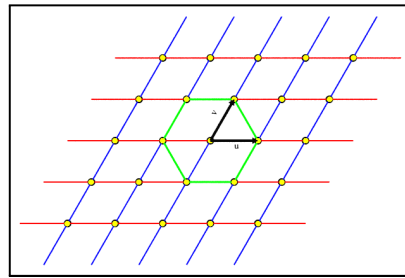
- (1) $\|u\| = \|v\| = \|u - v\| = \|u + v\|$,
- (2) $\|u\| = \|v\| = \|u - v\| < \|u + v\|$,
- (3) $\|u\| = \|v\| < \|u - v\| = \|u + v\|$,
- (4) $\|u\| = \|v\| < \|u - v\| < \|u + v\|$,
- (5) $\|u\| < \|v\| = \|u - v\| = \|u + v\|$,
- (6) $\|u\| < \|v\| = \|u - v\| < \|u + v\|$,
- (7) $\|u\| < \|v\| < \|u - v\| = \|u + v\|$,
- (8) $\|u\| < \|v\| < \|u - v\| < \|u + v\|$.

No caso (1), a terceira igualdade dá-nos $\alpha\lambda = 0$ e, como $\lambda \neq 0$, concluímos que $\alpha = 0$ e a segunda igualdade reduz-se, então, a $\beta^2 = \lambda^2 + \beta^2$ com $\lambda \neq 0$, o que é absurdo. Este caso não pode ter lugar, portanto.

No caso (2), temos $\lambda^2 = \alpha^2 + \beta^2 = \lambda^2 + \alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha\lambda < \lambda^2 + \alpha^2 + \beta^2 + 2\alpha\lambda$. A segunda igualdade dá-nos $\lambda^2 - 2\alpha\lambda = 0$, de modo que $\alpha = \lambda/2$ e, da primeira igualdade tiramos que $\beta = \pm\lambda\sqrt{3}/2$. A liberdade de escolha que ainda nos resta permite impôr que

$$v = \frac{\lambda}{2}e_1 + \frac{\sqrt{3}\lambda}{2}e_2.$$

Dizemos que a rede $R_{G,p}$ é, neste caso, uma rede hexagonal.

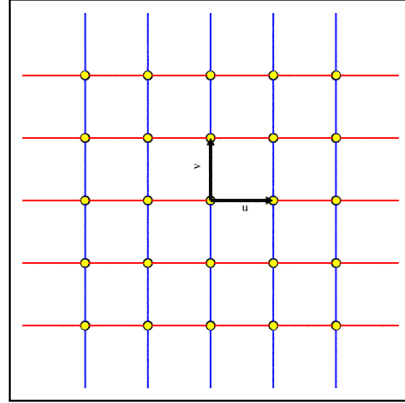


Rede hexagonal.

No caso (3), temos

$$\lambda^2 = \alpha^2 + \beta^2 < \lambda^2 + \alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha\lambda = \lambda^2 + \alpha^2 + \beta^2 + 2\alpha\lambda.$$

A segunda igualdade dá-nos $\alpha\lambda = 0$, de modo que $\alpha = 0$ e a primeira igualdade dá-nos $\beta = \pm\lambda$. Trocando v por $-v$, se necessário fôr, podemos supôr que $v = \lambda e_2$. Dizemos que a rede $R_{G,p}$ é uma rede quadrada.



Rede quadrada.

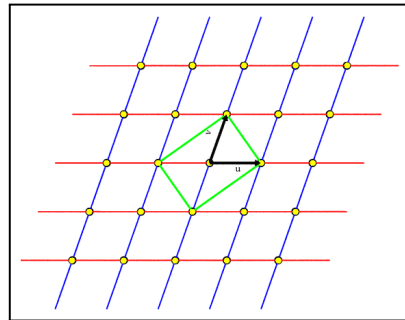
No caso (4), temos

$$\lambda^2 = \alpha^2 + \beta^2 < \lambda^2 + \alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha\lambda < \lambda^2 + \alpha^2 + \beta^2 + 2\alpha\lambda.$$

Como $\lambda^2 = \alpha^2 + \beta^2$, temos $\lambda^2 + \alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha\lambda = 2\lambda^2 - 2\alpha\lambda$ e, portanto, $\lambda^2 < 2\lambda^2 - 2\alpha\lambda$, donde tiramos que $\lambda > 2\alpha$. Neste caso, consideremos os vectores $u+v$ e $u-v$ escrevem-se $u+v = (\lambda+\alpha)e_1 + \beta e_2$ e $u-v = (\lambda-\alpha)e_1 - \beta e_2$, de modo que

$$\Phi(u+v, u-v) = (\lambda+\alpha)(\lambda-\alpha) - \beta^2 = 0.$$

Assim, cada nó da rede surge como o centro do rectângulo definido pelos nós contíguos. Dizemos que $R_{G,p}$ é uma rede rectangular centrada ou rômbrica.



Rede rectangular centrada

No caso (5) temos

$$\lambda^2 < \alpha^2 + \beta^2 = \lambda^2 + \alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha\lambda = \lambda^2 + \alpha^2 + \beta^2 + 2\alpha\lambda.$$

A última igualdade diz-nos que $\alpha = 0$ e a segunda dá-nos, então, $\beta^2 = \lambda^2 + \beta^2$, o que é impossível, pois $\lambda \neq 0$.

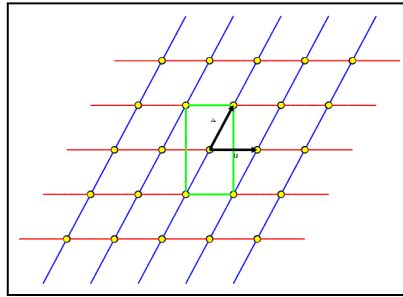
No caso (6), temos

$$\lambda^2 < \alpha^2 + \beta^2 = \lambda^2 + \alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha\lambda < \lambda^2 + \alpha^2 + \beta^2 + 2\alpha\lambda.$$

Da igualdade tiramos que $\lambda^2 - 2\alpha\lambda = 0$, de modo que $\alpha = \lambda/2$ e, portanto, $\beta^2 > 3\lambda^2/4$. Note-se que

$$\Phi(u, u - 2v) = \Phi(\lambda e_1, \lambda e_1 - 2\frac{\lambda}{2}e_1 - 2\beta e_2) = 0,$$

de modo que temos, de novo, $R_{G,p}$ é uma rede rectangular centrada.

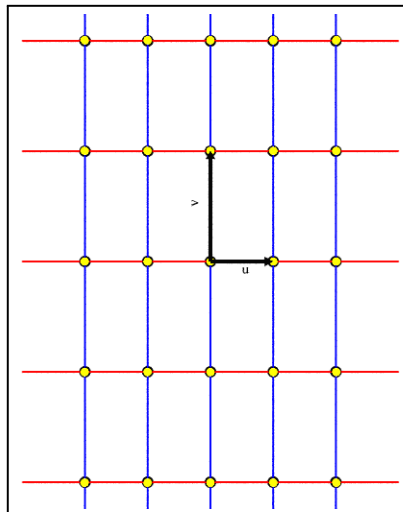


Rede rectangular centrada.

No caso (7), temos

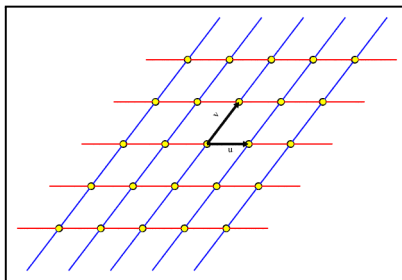
$$\lambda^2 < \alpha^2 + \beta^2 < \lambda^2 + \alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha\lambda = \lambda^2 + \alpha^2 + \beta^2 + 2\alpha\lambda.$$

Resulta que $\alpha = 0$. Dizemos que $R_{G,p}$ é uma rede rectangular.



Rede rectangular.

Finalmente, temos o caso (8). A rede $R_{G,p}$ é chamada rede oblíqua ou paralela.



Rede oblíqua ou paralela.

Resumindo:

Teorema 1.19. *Seja G um grupo discreto de isometrias do plano euclidiano tal que existem vectores linearmente independentes u, v tais que $\mathfrak{T}_G = \mathfrak{T}_{u,v}$. Então os vectores u e v podem ser escolhidos de tal forma que $\|u\| \leq \|z\|$ para qualquer z tal que $t_z \in \mathfrak{T}_G$ e $\|v\| \leq \|z'\|$ para qualquer vector z não colinear com u e tal que $t_z \in \mathfrak{T}_G$. Seja (e_1, e_2) uma base ortonormada do plano tal que $u = \lambda e_1$ para algum $\lambda \in \mathbb{R}$. Então uma e uma só das situações seguintes tem lugar:*

(a). *Os vectores u e v satisfazem: $\|u\| = \|v\| = \|u - v\| < \|u + v\|$; neste caso, o vector v pode ser escolhido tal que:*

$$v = \frac{\lambda}{2}e_1 + \frac{\sqrt{3}\lambda}{2}e_2,$$

e, para todo $p \in \mathbb{R}^2$ a rede $R_{G,p}$ é uma rede hexagonal;

(b). *Os vectores u e v satisfazem: $\|u\| = \|v\| < \|u - v\| = \|u + v\|$; neste caso, o vector v pode ser escolhido tal que $v = \lambda e_2$ e, para todo $p \in \mathbb{R}^2$ a rede $R_{G,p}$ é uma rede quadrada;*

(c). *Os vectores u e v satisfazem: $\|u\| = \|v\| < \|u - v\| < \|u + v\|$ ou $\|u\| < \|v\| = \|u - v\| < \|u + v\|$. Neste caso, se $v = \alpha e_1 + \beta e_2$ então $\lambda \geq 2\alpha$ e, para todo $p \in \mathbb{R}^2$ a rede $R_{G,p}$ é uma rede rectangular centrada;*

(d). *Os vectores u e v satisfazem: $\|u\| < \|v\| < \|u - v\| = \|u + v\|$. Neste caso $v = \beta e_2$ para algum $\beta \in \mathbb{R}$ e, para todo $p \in \mathbb{R}^2$ a rede $R_{G,p}$ é uma rede rectangular;*

(e). *Os vectores u e v satisfazem: $\|u\| < \|v\| < \|u - v\| < \|u + v\|$. Neste caso, para todo $p \in \mathbb{R}^2$ a rede $R_{G,p}$ é uma rede oblíqua.*

Este teorema restringe as redes de pontos que podem estar associadas a um grupo discreto de isometrias do plano. Vamos agora ver que existem, igualmente, restrições severas sobre os subgrupos de rotações de um grupo discreto. Suponhamos, pois, que existe um ponto $p \in \mathbb{R}^2$ tal que $G_{+,p} = SO_p \cap G \neq \{1_{\mathbb{R}^2}\}$. Se $g \in G_{+,p}$, então $g = r_{\theta,p}$ para algum real θ e é claro que $r_\theta \in G_*$ (cf. T.1.16). Segundo o T.1.16, $r_\theta(mu + nv) \in W$. Concluimos que existem inteiros a, b, c, d tais que $r_\theta(u) = au + bv$ e $r_\theta(v) = cu + dv$. Assim, na

base (u, v) , a matriz de r_θ é

$$M_1 = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$$

e, portanto, o traço de r_θ é o inteiro $a + d$. Numa base ortonormada directa, a matriz de r_θ é, como vimos,

$$M_2 = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}.$$

Como o traço de r_θ é um invariante, concluímos que $2 \cos \theta \in \mathbf{Z}$, o que implica que apenas são possíveis os valores $\theta = -1, -1/2, 0, 1/2, 1$. Por outro lado, como vimos (cf. T.1.17), $G_{+,p}$ é um grupo cíclico. Isto é, existe um inteiro k tal que $G_{+,p} = \{r_{2m\pi/k,p} : m = 0, \dots, k-1\}$. A restrição sobre θ implica que k só pode assumir um dos valores 1, 2, 3, 4 ou 6. Isto é, temos o

Teorema 1.20. (*Restrição Euclidiana ou Restrição Cristalográfica*) *Sejam G um grupo discreto de isometrias de terceiro tipo e suponhamos que existe $p \in \mathbb{R}^2$ tal que $G_{+,p} \neq \{1_{\mathbb{R}^2}\}$. Então existe um inteiro $k \in \{1, 2, 3, 4, 6\}$ tal que $G_{+,p} = \{r_{2m\pi/k,p} : m = 0, \dots, k-1\}$.*

Onde, k representa a ordem da rotação.

O teorema tem a ainda o seguinte

Corolário 1.1. *Se um grupo de Padrões G contém uma rotação de ordem 4 então não pode conter rotações de ordem 3 nem de ordem 6.*

DEMONSTRAÇÃO. Seja $r_{\frac{2\pi}{4};p} \in G$, e suponhamos, com vista à obtenção de absurdo, que $r_{\frac{2\pi}{3};q} \in G$. Como G é um grupo temos que $r_{\frac{2\pi}{3};q} \circ r_{-\frac{2\pi}{4};p} \in G$, mas $r_{\frac{2\pi}{3};q} \circ r_{-\frac{2\pi}{4};p} = r_{\frac{2\pi}{12};t}$ o que pela, restrição cristalográfica (k só pode ser igual a: 1, 2, 3, 4 ou 6), não pode acontecer, portanto é absurdo. Como $r_{\frac{2\pi}{6};q} \circ r_{\frac{2\pi}{6};q} = r_{\frac{2\pi}{3};q}$ imediatamente se conclui que também $r_{\frac{2\pi}{6};q}$ não pode pertencer a G . \square

Analisemos agora os casos em que G contém reflexões. Como sempre, u designa um vector de norma mínima entre os vectores w tais que $t_w \in G$ e v designa um vector de norma mínima entre os w não colineares com u e tais que $t_w \in G$. Os referenciais ortonormados que consideraremos têm bases (e_1, e_2) tais que $u = \lambda e_1$ e $v = \alpha e_1 + \beta e_2$ com $\lambda > 0$, $\alpha \geq 0$ e $\beta \neq 0$. Como sempre, W designa o conjunto dos vectores da forma $mu + nv$, com $m, n \in \mathbf{Z}$. Dizer que $t_w \in G$ é euivalente a dizer que $w \in W$. Recorde-se, ainda, que se g é o automorfismo ortogonal associado a um elemento de G , então $g(W) = W$ (cf. T.1.16). Em particular, se $h \in G$ tem um ponto fixo p e $R_{G,p} = p + W$, então $h(R_{G,p}) = R_{G,p}$.

Suponhamos que G contém a reflexão s_D numa recta D . Escolhamos um ponto $a \in D$ e consideremos o ponto $p = t_u(a) \in R_{G,a}$. Resulta das observações acima que $q = s_D(p) \in R_{G,a}$. Suponhamos que a recta E definida por a e p não é nem igual a D , nem perpendicular a D . Então é claro que os vectores \vec{ap} e \vec{aq} são linearmente independentes. Mas $\vec{ap} = u$ e, como $s_D(a) = a$,

temos $\|\vec{a\tilde{q}}\| = \|\vec{a\tilde{p}}\|$. Assim, $\vec{a\tilde{q}}$ é de norma mínima entre os vectores w tais que $t_w \in \mathfrak{T}_G$ que não são colineares com u . Por outras palavras, podemos tomar $v = \vec{a\tilde{q}}$. Resulta que $\|v\| = \|u\|$ e, portanto, a rede $R_{G,a}$ é hexagonal, quadrada ou rectangular centrada e, em qualquer destes casos, a recta de reflexão é paralela a uma das diagonais de uma qualquer das células da rede.

Resta-nos analisar o caso em que a recta E é a recta D ou é perpendicular a D . Nestes casos, escolhemos um referencial ortonormado com origem em a e cuja base (e_1, e_2) satisfaz as condições estabelecidas acima.

Se D é perpendicular a E , então $s_D(a + xe_1 + ye_2) = a - xe_1 + ye_2$. Em particular, teremos $s_D(a + v) = A - \alpha e_1 + \beta e_2$. Segundo o T.1.16, $-\alpha e_1 + \beta e_2 \in W$, isto é, existem inteiros m, n tais que $-\alpha e_1 + \beta e_2 = mu + nv$. Assim, temos $-\alpha e_1 + \beta e_2 = (m\lambda + n\alpha)e_1 + n\beta e_2$ e, como $\beta \neq 0$, temos $n = 1$ e $m\lambda + \alpha = -\alpha$, donde tiramos que $m\lambda + 2\alpha = 0$. Se m é par e $m = 2k$, $k \in \mathbf{Z}$, a relação anterior diz-nos que $k\lambda + \alpha = 0$ e, portanto, $ku + v = (k\lambda + \alpha)e_1 + \beta e_2 = \beta e_2 \in W$. Como $\|\beta e_2\|^2 = \beta^2 \leq \|v\|^2 = \alpha^2 + \beta^2$, o facto de v ser de norma mínima entre os vectores de W não colineares com u implica que $\alpha = 0$. Se m é ímpar e $m = 2k + 1$, a relação $m\lambda + 2\alpha = 0$ implica que $k\lambda + \alpha = -\lambda/2$ e, portanto, $ku + v = -(\lambda/2)e_1 + \beta e_2 \in W$. Esta relação mostra que $(\lambda/2)^2 + \beta^2 \geq \alpha^2 + \beta^2$ de modo que $\lambda^2 \geq 4\alpha^2$. Mas, como $m\lambda + 2\alpha = 0$, temos $m^2\lambda^2 = 4\alpha^2$, de modo que $\lambda^2 \geq m^2\lambda^2$, o que evidentemente, implica que $m = -1, 0$. O segundo caso contradiz as hipóteses sobre m , de modo que temos $\lambda = 2\alpha$. Neste caso, $u - v = \alpha e_1 - \beta e_2$ e $u + v = 3\alpha e_1 + \beta e_2$, de modo que $\|u - v\|^2 = \|v\|^2 = \alpha^2 + \beta^2$ e $\|u + v\|^2 = 9\alpha^2 + \beta^2$. Assim, temos $\|u\| \leq \|v\| = \|u - v\| \leq \|u + v\|$. Este caso apenas é possível quando a rede é hexagonal ou rectangular centrada.

Se $D = E$, temos $s_D(a + v) = A + \alpha e_1 - \beta e_2$. Existem, portanto, inteiros m, n tais que $\alpha e_1 - \beta e_2 = mu + nv = (m\lambda + n\alpha)e_1 + n\beta e_2$, donde tiramos que $n = -1$ e $m\lambda - \alpha = \alpha$. Assim, $m\lambda - 2\alpha = 0$. Se $m = 2k$ é par, resulta que $ku - v = -\beta e_2$ e deduzimos, de novo, que $\alpha = 0$, de modo que a rede é rectangular ou quadrada. Se $m = 2k + 1$ é ímpar, temos $2k\lambda + \lambda - 2\alpha = 0$, de modo que $\lambda/2 = \alpha - k\lambda$ e, portanto, $v - ku = \alpha e_1 + \beta e_2 - k\lambda e_1 = (\lambda/2)e_1 + \beta e_2$. Resulta, novamente, que $\lambda = 2\alpha$ e, portanto, que $\|v\| = \|u - v\|$. A rede, neste caso, é hexagonal ou rectangular centrada.

Guardando as notações, temos, portanto, o

Teorema 1.21. *Seja G um grupo discreto de isometrias do plano euclidiano, de terceiro tipo. Se G contém uma reflexão s_D numa recta D , então uma das seguintes situações tem lugar, onde $a \in D$:*

(a). *A rede $R_{G,a}$ é hexagonal, quadrada ou rectangular centrada e a direcção de D é $IR(u - v)$ ou $IR(u + v)$;*

(b). *A rede $R_{G,a}$ é rectangular e a direcção de D é IRu ou IRv .*

Suponhamos agora, que existe uma reflexão deslizante $s_{D,w} \in G$ e não contém reflexões. Por definição, $s_{D,w}$ fixa a recta D . Note-se que $s_{D,w} \circ s_{D,w} \in G$ e é uma translação que fixa a recta D . Se T' designa o conjunto das translações pertencentes a G que fixam a recta D , seja H o grupo gerado por

T' e $s_{D,w}$. Trata-se de um grupo discreto de isometrias do segundo tipo. O que vimos na secção anterior permite-nos então, supôr que $s_{D,w}$ é tal que, se $t_{2w} = s_{D,w} \circ s_{D,w}$, então $2w$ é de norma mínima entre os vectores z' tais que $t_{z'} \in T'$. Seja $a \in D$ e E a recta perpendicular a D que passa por a . Sejam $M = s_{D,w}(E)$ e $P = s_{D,w} \circ s_{D,w}(E)$. Por definição, se $p = s_{D,w} \circ s_{D,w}(a)$ então \vec{ap} é de norma mínima entre os vectores z' tais que $t_{z'} \in T'$. Seja z um vector de norma mínima entre os vectores de W que não são colineares com \vec{ap} e $b = a + z$. Como $\vec{ap} + z \in W$ e não é colinear com \vec{ap} , é claro que $\|\vec{ap} + z\| \geq \|z\|$ e, portanto, o ponto b encontra-se entre as rectas E e P . Se $b \in E$ é claro que a rede associada a G é rectangular e D é paralela a um dos lados da rede. Se b se encontra entre E e P , seja $c = s_D(b)$. Temos $s_{D,w} \circ t_z \circ s_{D,w}^{-1}(a) = s_{D,w} \circ t_z \circ s_{D,w}^{-1}(a) = s_{D,w}(a - w + z) = s_{D,w}(b - w) = s_D(b) = c$, de modo que $s_{D,w} \circ t_z \circ s_{D,w}^{-1} = t_{\vec{ac}}$. Daqui resulta que $\vec{ac} \in W$ e, portanto, a rede é hexagonal, quadrada ou rectangular centrada.

Resumindo

Teorema 1.22. *Seja G um grupo discreto de isometrias do plano euclidiano, de terceiro tipo. Se G contém uma reflexão deslizante $s_{D,w}$, então:*

- (a). *A rede $R_{G,a}$ é hexagonal, quadrada ou rectangular centrada e a direcção de D é $IR(u - v)$ ou $IR(u + v)$;*
- (b). *A rede $R_{G,a}$ é rectangular e a direcção de D é IRu ou IRv .*

Suponhamos, finalmente, que G contém uma reflexão deslizante $s_{D,w}$ e que existe um ponto a tal que $R_{G,a}$ é fixa por $s_{D,w}$. Então $p = s_{D,w}(a) \in R_{G,a}$, o que significa que $\vec{ap} \in W$ e, portanto, $t_{-\vec{ap}} \in G$. Resulta que $t_{-\vec{ap}} \circ s_{D,w} \in G$. O automorfismo ortogonal associado a esta isometria é uma reflexão. Como $t_{-\vec{ap}} \circ s_{D,w}(a) = t_{-\vec{ap}}(p) = a$, vemos que $t_{-\vec{ap}} \circ s_{D,w}$ é uma reflexão. Concluindo

Teorema 1.23. *Seja G um grupo discreto de isometrias do plano euclidiano, de terceiro tipo. Se G contém uma reflexão deslizante que fixa uma rede $R_{G,p}$ então G contém uma reflexão.*

Com base nestes resultados, abordamos agora a questão da determinação dos grupos discretos de terceiro tipo. Tal como no caso dos grupos de frisos, procedemos a uma análise caso a caso.

Esta abordagem pode ser feitas de diferentes maneiras, por exemplo:

- (a) Baseando-nos no tipo de rede associada;
- (b) Identificando em primeiro lugar os grupos que só contém isometrias directas e à "custa" destes, os restantes.

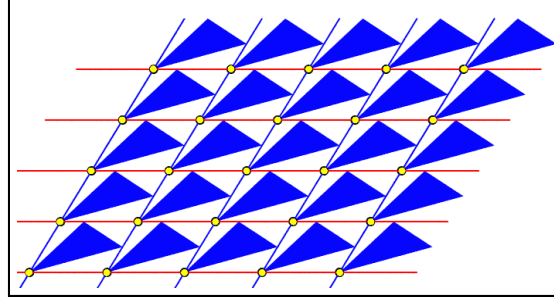
A primeira maneira (a), consiste na aplicação do *método de exaustão*, isto é, por esgotamento de todos casos possíveis de combinação entre o tipo de rede e o grupo ortogonal. Cada combinação, ou gera um grupo, ou então, prova-se que é impossível. Sobre esta maneira apresentamos, a título de exemplo, três padrões p_1 e p_2 associados à rede oblíqua (ou paralela) e o grupo pm associado à rede rectangular. Vejamos o

Caso 1 - Rede Oblíqua ou Paralela.

Neste caso, a base ortonormada escolhida, (e_1, e_2) é tal que $u = \lambda e_1$ e $v = \alpha e_1 + \beta e_2$ com $\lambda > 0$, $\alpha > 0$ e

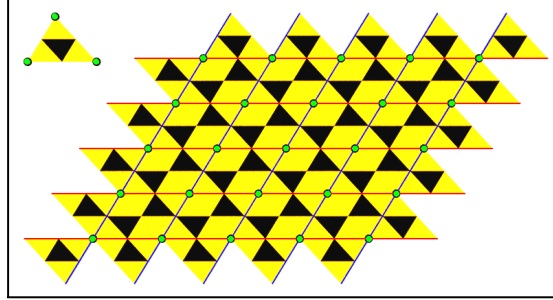
$$\lambda^2 < \alpha^2 + \beta^2 < \lambda^2 + \alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha\lambda < \lambda^2 + \alpha^2 + \beta^2 + 2\alpha\lambda.$$

Caso 1a - G apenas contém translações. Neste caso, existem vectores u, v tais que $G = \mathfrak{T}_{u,v}$. A classe destes grupos é designada pelo símbolo $p1$.



Acção da classe $p1$.

Caso 1b - G contém uma isometria cuja parte linear é um automorfismo ortogonal diferente da identidade. Os resultados demonstrados mais atrás mostram que, neste caso, os automorfismos ortogonais em causa são rotações. O teorema da restrição cristalográfica mostra, então, que as rotações em causa são rotações de ângulo π . Consequentemente, existe um ponto p tal que $r_{\pi,p} \in G$. O grupo é constituído pelas isometrias da forma $t_{mu+nv} \circ r_{\pi,p}^j$, $m, n \in \mathbf{Z}$, $j = 1, 2$. A classe destes grupos é designada pelo símbolo $p2$.



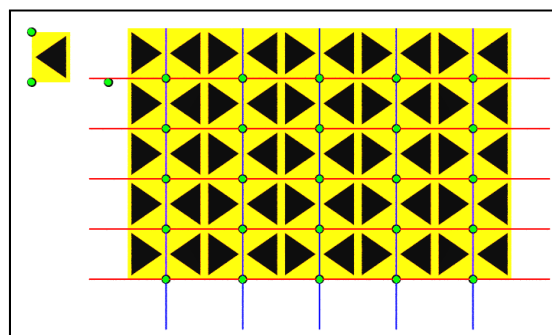
Acção da classe $p2$.

Caso 2 - Rede Rectangular.

Neste caso, a base ortonormada escolhida, (e_1, e_2) é tal que $u = \lambda e_1$ e $v = \beta e_2$ com $\beta > \lambda > 0$. Aqui é possível que o grupo contenha reflexões e rotações. Uma vez que as rotações devem preservar a rede, é claro que apenas é possível a rotação de ângulo π . Evidentemente, a rede é preservada por reflexões em rectas de direcções e_1 e e_2 e em reflexões deslizantes com as mesmas direcções. Note-se, ainda, que, se G não contém reflexões, então cai numa das classes já descritas.

Caso 1a - O grupo G_* está reduzido a $\{1_{\mathbb{R}^2}, s_D\}$ onde s_D é uma reflexão. Neste caso, os elementos de G são da forma $t_{mu+nv} \circ s_D^j$ com $m, n \in \mathbf{Z}$ e $j = 1, 2$.

Os resultados anteriores dizem-nos que a recta D tem direcção IRe_1 ou IRe_2 . A classe destes grupos é designada pelo símbolo pm .



Acção do grupo pm .

Seguindo este tipo de argumentação, não é difícil encontrar os restantes catorze casos.

A segunda maneira (b), consiste em identificar primeiro os grupos que só contêm isometrias directas, em número de cinco e, posteriormente, conjugando estes com as isometrias inversas associadas, abordamos as restantes doze grupos.

Vamos usar esta segunda maneira para obter a

Classificação dos 17 Grupos de Padrões. A classificação dos grupos de padrões de plano e do espaço foi realizada por Fedorov em 1891, na Rússia, quando este desenvolvia estudos de Cristalografia. E.S. Fedorov, estabeleceu a primeira prova rigorosa da existência de grupos de simetria dos cristais no espaço tridimensional, num total de 230. A partir destes grupos de simetria do espaço, ele demonstrou a existência dos 17 grupos de simetria no plano. Esse trabalho só foi divulgado nos anos 20 do passado século, através dos trabalhos de Niggli e de Polya. Por causa da sua origem os 17 grupos de simetria são denominados *Grupos Cristalográficos*. Mas estes grupos de simetria são também denominados: *grupos de azulejos* ou *grupos de papéis de parede* (denominados, aqui de *Grupos de Padrões*).

Vamos utilizar a notação standart, conhecida por notação cristalográfica ou notação internacional⁵. Esta notação é uma adaptação dos símbolos utilizados nas **tábuas internacionais de cristalografia para raio-x**. Consiste em

⁵Ao efectuar pesquisas referentes ao estudo dos grupos de padrões (grupos cristalográficos), encontramos um problema (que julgamos ser comum a todos quantos façam um estudo nesta área) - as várias notações usadas a gosto de cada autor. No final deste trabalho, encontra-se, em forma de desdobrável, uma **tábua de equivalências de notações**, onde são apresentadas as notações de: Montesinos Amilibia, Internacional (abreviada), Bossard, Polya, Niggli, Speiser, Fejes Toth, Shubinov-Koptsik, Wells Bell&Fletcher e Orbifold de John Conway.

quatro caracteres que nos dão a identificação de: *célula unitária*⁶, (também conhecida por *paralelogramo fundamental*), *centros de rotação e reflexões básicas*. É usual escolher a célula unitária de modo que os centros de rotação de maior ordem figurem em seus vértices, porém existem dois casos em que os centros de rotação de maior ordem se encontram centrados (*cm*, *cm*). Os eixos de reflexão são paralelos a um ou aos dois lados da célula unitária. Consideramos como eixo-OX, o lado esquerdo da célula. Assim, lendo as notações da esquerda para a direita, deparamo-nos com:

1. **p** ou **c** consoante o *paralelogramo fundamental* é **primitivo** ou **centrado**. O paralelogramo diz-se centrado se é um rombo (losango), (se não é um quadrado), e neste caso, uma das suas diagonais é um eixo de simetria e a ordem máxima dos ângulos é 1 ou 2. Nos restantes casos o paralelogramo é primitivo⁷;

2. **n** é o inteiro que corresponde à maior ordem dos centros de rotação, será **1,2,3,4,ou 6**.

3. Este símbolo designa a existência de eixos de reflexão perpendiculares ao eixo-x, utilizando-se para o efeito 3 caracteres:

m (inicial da palavra inglesa "mirror" e da francesa "miroir" que significam espelho) indica eixos de reflexão; **g** (inicial da palavra inglesa "glide" e da francesa "glissement" que significam deslizamento) indica eixos de reflexão deslizante não triviais; e por fim **1** que indica a inexistência de reflexões.

4. Este último, faz referência ao ângulo que o eixo de reflexão (ou de reflexão deslizante) faz com o eixo-x, e como está directamente ligado aos centros de rotação, utilizamos a seguinte convenção, donde o ângulo depende do **n** que aparece na segunda posição: **1** ou **2** se o ângulo é de π , **4** se é de $\frac{\pi}{4}$ e **3** ou **6** se é de $\frac{\pi}{3}$; os símbolos **m**, **g** e **1** utilizam-se como em 3.

Observação 1.1. A não existência de símbolos nas posições três e quatro indica que o grupo não contém reflexões/reflexões deslizantes.

Uma vez apresentada/justificada a notação a usar, estamos em condições de proceder à classificação dos dezassete grupos de padrões.

Vamos seguir o tipo de argumentação apresentado por Ilda Perez e Paula Reis, no Boletim da SPM, de 2002. Como foi atrás referido, começaremos pelos

Grupos de Padrões que só contêm Isometrias Directas. Um grupo

⁶Uma célula unitária (ou paralelogramo fundamental) $P = P(p; u, v)$ é o fecho de uma região fundamental do grupo $\langle t_u, t_v \rangle$, subgrupo de G. O paralelogramo P preenche todo o plano por acção de $\langle t_u, t_v \rangle$ tendo-se pois,

$$\mathbb{R} = \cup_{m,n \in \mathbb{N}} t_{mu+nv}(P) = \cup_{m,n \in \mathbb{N}} P(p + mu + nv; u, v).$$

⁷No caso do paralelogramo ser centrado chamamos **célula fundamental** ao rectângulo que o envolve. Se o paralelogramo é primitivo a célula coincide com o paralelogramo.

pontual de G , G_* , deixa invariante o grupo das translações de G , assim, a classificação dos grupos de padrões que só contêm isometrias directas, G_+ , (translações e rotações) baseia-se no

Teorema 1.24. *A classificação dos grupos que só contêm isometrias directas é determinada pela ordem máxima de uma rotação de G .*

Há 5 tipos de grupos de padrões que só contêm isometrias directas:

$$p_6 = \left\langle t_u, r_{\frac{2\pi}{6};p} \right\rangle \longrightarrow \text{se a ordem máxima de uma rotação de } G \text{ é } 6;$$

$$p_4 = \left\langle t_u, r_{\frac{2\pi}{4};p} \right\rangle \longrightarrow \text{se a ordem máxima de uma rotação de } G \text{ é } 4;$$

$$p_3 = \left\langle t_u, r_{\frac{2\pi}{3};p} \right\rangle \longrightarrow \text{se a ordem máxima de uma rotação de } G \text{ é } 3;$$

$$p_2 = \langle t_u, t_v, H_p \rangle \longrightarrow \text{se a ordem máxima de uma rotação de } G \text{ é } 2;$$

$$p_1 = \langle t_v, t_v \rangle \longrightarrow \text{se } G \text{ não contém rotações.}$$

Observação 1.2. Se G é um grupo de padrões cujo grupo de translações é $\mathfrak{T}_G = \langle u, v \rangle$, as rotações de G são determinadas por \mathfrak{T}_G e pelas rotações de centro numa célula unitária de G .

Com efeito, se $P = P(p; u, v)$ é uma célula unitária de G e $r_{\theta;q}$ é uma rotação de G cujo centro q está numa célula unitária $P_{m,n} = P(p+mu+nv, u, v)$ então pelo teorema (1.12) $t_{-mu-nv} \circ r_{\theta;q} \circ t_{mu+nv} = r_{\theta;p'}$, onde $p' \in P$.

DEMONSTRAÇÃO. Apresentamos a seguir um esboço da demonstração.

Seja G um grupo de padrões contendo unicamente isometrias directas.

Pelo teorema (1.15) $\mathfrak{T}_G = \langle u, v \rangle$, com u e v linearmente independentes.

Se G não contém rotações então $G = \langle t_u, t_v \rangle = p_1$.

Se G contém rotações $r_{\frac{2\pi}{n};p}$, pelo teorema da restrição cristalográfica (1.20), a ordem máxima de uma rotação $r_{\frac{2\pi}{n};p}$ de G só pode ser 2, 3, 4 ou 6.

no exposto a baixo $G = \left\langle t_u, r_{\frac{2\pi}{n};p} \right\rangle$, se a ordem é 3, 4 ou 6

e $G = \langle t_u, t_u, H_p \rangle$, se a ordem é 2 (meias voltas).

1º caso: Seja G um grupo de padrões que contém rotações de ordem 3, 4 e 6.

Consideremos um vector u' de \mathfrak{T}_G de comprimento mínimo e o vector $v' = r_{\frac{2\pi}{n};0}(u')$, onde $r_{\frac{2\pi}{n};0}$ é uma rotação de ordem máxima de G . Assim sendo $\mathfrak{T}_G = \langle u', v' \rangle$, porque u' e v' são linearmente independentes, e $t_{v'} \in \left\langle t_{u'}, r_{\frac{2\pi}{n};p} \right\rangle$ pois $t_{v'} = r_{\frac{2\pi}{n};p} \circ t_{u'} \circ r_{-\frac{2\pi}{n};p}$. Para simplificação da escrita vamos supor $u' = u$ e $v' = v$.

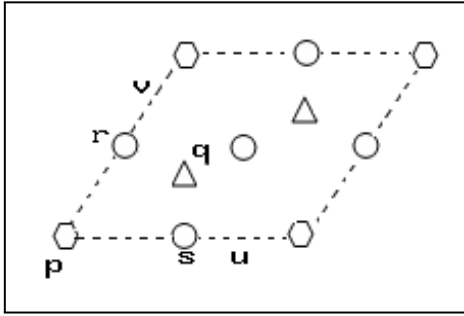
De seguida determinemos as rotações de G cujos centros pertencem à célula unitária $P = P(p, u, v)$.

A título de exemplo, consideremos o caso em que G contém rotações de ordem 6. Seja u um vector de comprimento mínimo de \mathfrak{T}_G e $r_{\frac{2\pi}{6};p}$ uma rotação

de ordem 6 de G . Consideremos a célula unitária $P = P(p, u, r_{\frac{2\pi}{6};p}(u))$, onde o vector $r_{\frac{2\pi}{6};0}(u) = v$ ver próxima figura. O corolário (1.1) diz-nos que G não contém rotações de ordem 4. Facilmente se verifica que $p + u$ é um 6-centro de p e que os pontos q, r e s , assinalados na próxima figura, são respectivamente um 3-centro e dois 2-centros de P .

$$\begin{aligned} r_{\frac{2\pi}{6};p+u} &= t_u \circ r_{\frac{2\pi}{6};p} \circ t_{-u} \\ r_{\frac{2\pi}{3};q} &= r_{\frac{2\pi}{6};p} \circ r_{\frac{2\pi}{6};p+u} \\ r_{\frac{2\pi}{2};s} &= r_{\frac{2\pi}{6};p+u} \circ r_{\frac{2\pi}{3};q} \\ r_{\frac{2\pi}{2};r} &= r_{\frac{2\pi}{6};p} \circ r_{\frac{2\pi}{3};q} \end{aligned}$$

Por rotações em q , seguidas de uma meia volta em $r_{\frac{2\pi}{3};q}(s)$ obtém-se o padrão de centros da célula unitária P indicada na figura. A existência de mais algum centro de rotação em P contraria a minimalidade dos vectores u e v .



Os padrões de centros de rotação das células unitárias nos restantes casos deduzem-se de modo análogo e estão representados nas figuras seguintes.

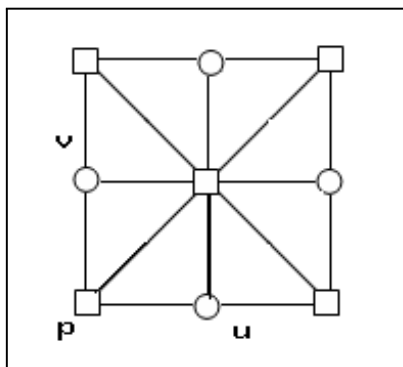
Utilizaremos a seguinte representação: Um centro de rotação de ordem 2, 3, 4 ou 6 é representado por um círculo, um triângulo, um quadrado ou um hexágono, respectivamente, (ver Anexo.4).

Padrão de centros da célula unitária

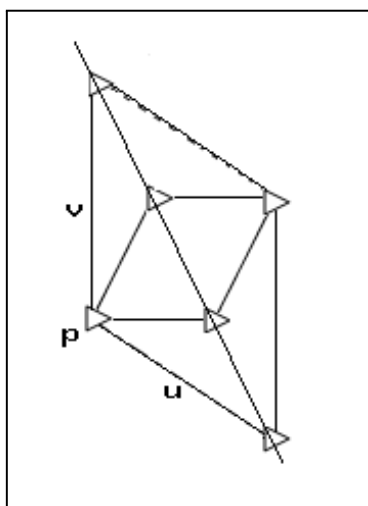
$$P = P(p; u, r_{\frac{2\pi}{4};p}(u)),$$

onde

$$r_{\frac{2\pi}{4};0}(u) = v.$$

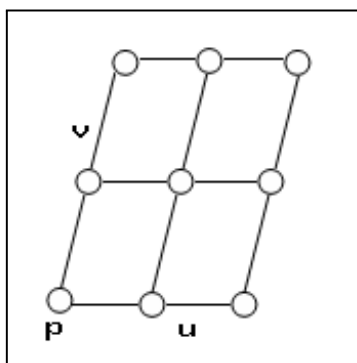


Padrão de centros da célula unitária $P = P(p; u, r_{\frac{2\pi}{3};p}(u))$, onde $r_{\frac{2\pi}{3};0}(u) = v$.



2º caso: Se a ordem é 2, $G = \langle t_u, t_v, H_p \rangle$, onde H_p é uma meia volta de centro p e u e v são dois geradores de \mathfrak{T}_G .

O Padrão de centros da célula unitária $P = P(p; u, v)$, está representado na figura:



□

Padrão de centros de rotação, células unitárias, células fundamentais de um grupo de padrões. Se G é um grupo de padrões, o subgrupo G_+ das

isometrias directas de G , é um dos grupos: p_1, p_2, p_3, p_4, p_6 .

Se $G_+ = P_i, i = 1, 2, 3, 4$ ou 6 o padrão de centros de rotação de G é um conjunto de todos os pontos do plano que são centros de rotação de G com a indicação da ordem máxima de uma rotação de cada centro. O padrão de centros e rotação é obtido por translação do padrão de centros da célula unitária determinado, para cada caso, na demonstração anterior.

Uma célula fundamental de $G_+ = P_i$ é um polígono convexo P_i^+ , que é o fecho de uma região fundamental de G_+ . Se $i = 1$ as células fundamentais de $G_+ = P_i$ são as células unitárias de G . Se $i = 2, 3, 4$ ou 6 as células fundamentais de $G_+ = P_i$ estão estritamente contidas numa célula unitária P , e por acção das rotações de centro em p preenchem o próprio P . Consequentemente, por acção das translações de G sobre a célula unitária P , preenchem todo o plano.

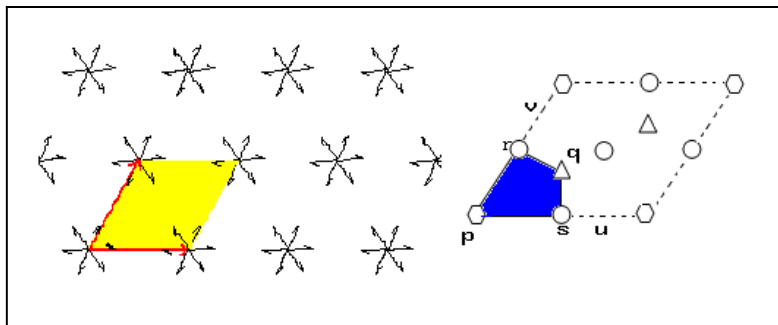
Vejam os, em análise mais pormenorizada, cada um destes grupos de padrões do plano euclidiano. Para cada um deles apresentamos as transformações de simetria existentes numa célula unitária, (onde também estão assinalados os centros de rotação e a sua ordem) e um padrão construído com o programa Kali, onde assinalámos a vermelho os vectores associados ao grupo das translações e a amarelo o paralelogramo fundamental. Os símbolos que correspondem à ordem dos centros encontram-se no apêndice.

Ilustrações. $\circ p_6 = \langle t_u, r_{\frac{2\pi}{6}}; p \rangle \longrightarrow$ se a ordem máxima de uma rotação

de G é 6;

Contém rotações de ordem 6, de ordem 3 e de ordem 2.

A rede é do tipo hexagonal.

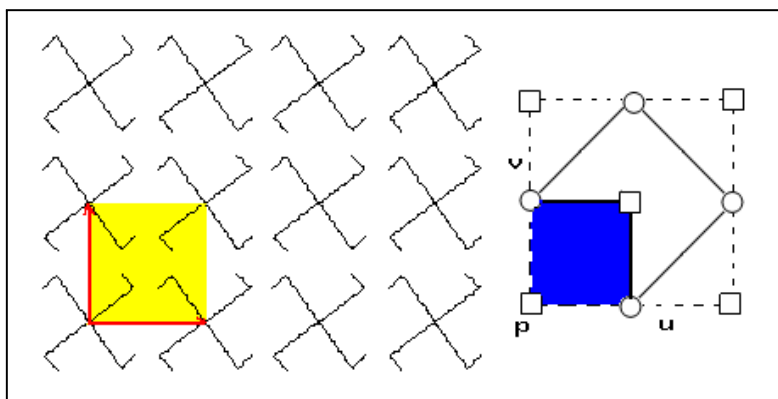


Grupo de simetria p_6 .

$\circ p_4 = \langle t_u, r_{\frac{2\pi}{4}}; p \rangle \longrightarrow$ se a ordem máxima de uma rotação de G é 4;

Contém rotações de ordem 4 e de ordem 2;
Os centros de rotação de ordem 2 estão entre os centros de ordem 4.

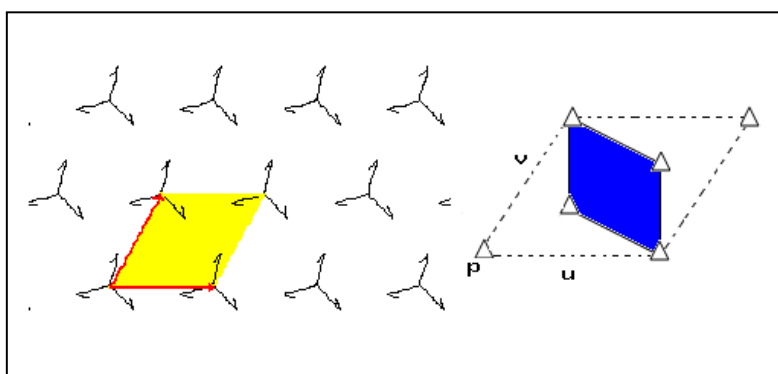
A rede é do tipo quadrada.



Grupo de simetria p_4 .

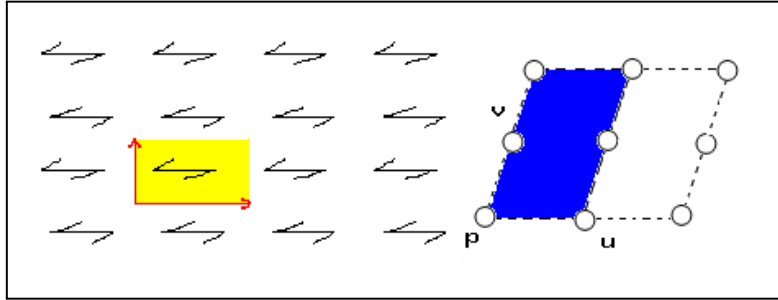
◦ $p_3 = \langle t_u, r_{\frac{2\pi}{3};p} \rangle \longrightarrow$ se a ordem máxima de uma rotação de G é 3;
Contém rotações de ordem 3.

A rede é do tipo hexagonal.



Grupo de simetria p_3 .

◦ $p_2 = \langle t_u, t_v, H_p \rangle \longrightarrow$ se a ordem máxima de uma rotação de G é 2;
Contém rotações de ordem 2 (de π).
A rede é do tipo paralela.

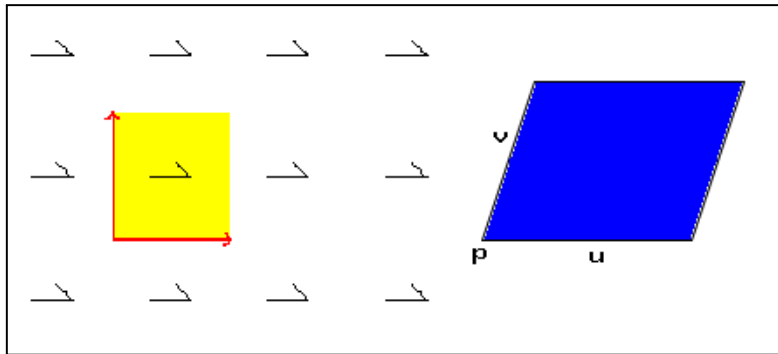
Grupo de simetria p_2 .

$\circ p_1 = \langle t_u, t_v \rangle \longrightarrow$ se G não contém rotações.

Contém apenas translações;

Os dois eixos de translação podem fazer um ângulo qualquer entre eles.

A rede é do tipo paralela.

Grupo de simetria p_1 .

Grupos de Padrões que contêm Isometrias Inversas. Se considerarmos

a possibilidade do grupo de simetrias do plano conter também **isometrias inversas** (reflexões e reflexões deslizantes) então aparecem 12 novos grupos.

A classificação destes 12 grupos de padrões faz-se identificando as simetrias inversas das células fundamentais dos 5 grupos que contêm só isometrias directas $P_i, i = 1, 2, 3, 4$ e 6, classificados no teorema anterior.

Vamos agora proceder à classificação dos grupos de padrões que contêm isometrias inversas e cujo subgrupo de isometrias directas é um dos cinco P_i , classificados anteriormente.

Seja G um grupo de padrões que contenha isometrias inversas (reflexões e reflexões deslizantes). Esta classificação obtém-se a partir das observações seguintes:

Observação 1.3. Fixada uma região fundamental R de G_+ , todas as isometrias inversas de G são geradas por G_+ e pelas reflexões ou reflexões deslizantes em rectas que intersectam R .

Com efeito, se D é uma recta de reflexão ou reflexão deslizante que não intersecte a região fundamental R então D intersecta uma região fundamental da forma $f(R)$ com $f \in G_+$, pois, da definição de região fundamental sabemos que o plano é a união das imagens $f(r)$, com $f \in G_+$.

A recta $f^{-1}(D)$ intersecta r e a reflexão s_D (respectivamente, reflexão deslizante $s_{D;v}$) está em G se e só se a reflexão $s_{f^{-1}(D)}$ (respectivamente, reflexão deslizante $s_{D(f^{-1}(l), f^{-1}(v))}$) está em G .

Observação 1.4. Existe apenas um número finito de direcções para as rectas de reflexão ou reflexão deslizante de G .

Se D , é uma recta de reflexão ou de reflexão deslizante de G a transformação ortogonal f_* associada à reflexão ou à reflexão deslizante em D deixa invariante o grupo das translações \mathfrak{T}_G . Em particular, f_* transforma o conjunto de vectores de comprimento m de \mathfrak{T}_G no conjunto dos vectores de comprimento m de \mathfrak{T}_G . Seja qual for o m (em especial, se m for o comprimento mínimo) o conjunto dos vectores de comprimento m é finito e portanto as rectas de reflexão ou reflexão deslizante que o deixam invariante têm um número finito de direcções.

Observação 1.5. As reflexões e reflexões deslizantes de G são simetrias do padrão de centros de G .

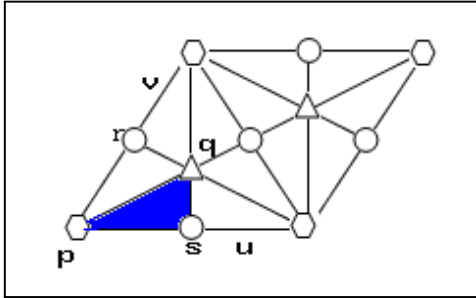
Se f é uma reflexão ou uma reflexão deslizante de G e $r_{\frac{2\pi}{k};p}$ é uma rotação de ordem k e centro p de G , a rotação $f \circ r_{\frac{2\pi}{k};p} \circ f^{-1} = r_{\frac{2\pi}{k};f(p)}$ está em G e é uma rotação de ordem K com centro $f(p)$.

A classificação geral dos grupos de padrões resume-se agora a fixar para cada um dos casos $G_+ = P_i$, $i = 1, 2, 3, 4$ e 6 uma região fundamental R_i , identificar os conjuntos de rectas com as direcções apropriadas que intersectam R_i e são simetrias do padrão de centros de P_i .

Verifica-se que para obter todos os grupos de padrões basta considerar as rectas que correspondem a simetrias de reflexão ou reflexão deslizante de alguma célula fundamental de P_i , como nos é dado observar na enumeração completa que se segue.

Seja um grupo G de padrões que contém isometrias inversas. Para cada um dos casos $G_+ = P_i$, consideremos uma célula unitária de G cujos lados correspondem a vectores de comprimento mínimo e uma célula fundamental de G , (a azul, como se vê nas figuras seguintes).

1º caso: Se $G_+ = p_6$



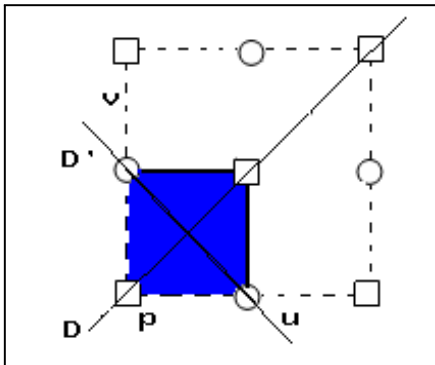
Célula unitária e célula fundamental do grupo de simetria p_6 .

A célula fundamental de G assinalada na figura admite como simetria a reflexão na recta D . Qualquer outra reflexão ou reflexão deslizante satisfazendo as condições patentes nas três observações anteriores, relativamente a uma das regiões fundamentais associadas à célula fundamental obtém-se por composição de R_D com isometrias de G_+ .

Consequentemente, existe um único grupo de azulejos com isometrias inversas e cujo subgrupo de isometrias directas $G_+ = P_i$. Esse grupo é $p6m = \langle t_u, r_{\frac{2\pi}{6};p}, s_D \rangle$.

De modo análogo se conclui que:

2º caso: Se $G_+ = p_4$



Célula unitária e célula fundamental do grupo de simetria p_4 .

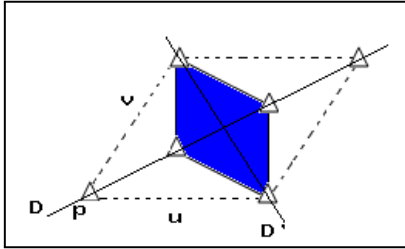
Neste caso,

· Ou tem-se $p4m = \langle t_u, r_{\frac{2\pi}{4};p}, s_D \rangle$, onde D é a recta de simetria da célula fundamental de p_4 assinalada na figura,

· Ou tem-se $p4g = \langle t_u, r_{\frac{2\pi}{4};p}, s_{D'} \rangle$, onde D' é a recta de simetria da célula fundamental assinalada na figura.

Portanto verifica-se que $p4m$ e $p4g$ são os únicos grupos de padrões que contêm isometrias inversas e cujo subgrupo de isometrias directas $G_+ = p_4$.

3º caso: Se $G_+ = p_3$



Célula unitária e célula fundamental do grupo de simetria p_3 .

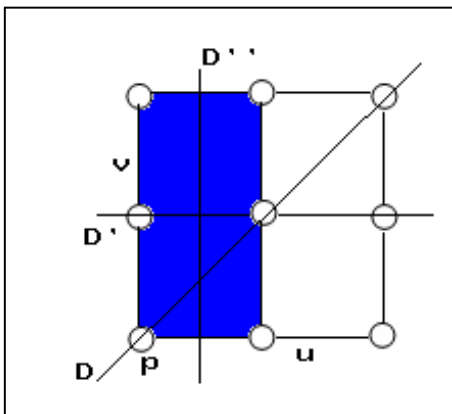
Neste caso,

· Ou tem-se $p3m1 = \langle t_u, r_{\frac{2\pi}{3};p}, s_D \rangle$, onde D é a recta de simetria da célula fundamental assinalada na figura,

· Ou tem-se $p31m = \langle t_u, r_{\frac{2\pi}{3};p}, s_{D'} \rangle$, onde D' é a recta de simetria da célula fundamental assinalada na figura.

Portanto verifica-se que $p3m1$ e $p31m$ são os únicos grupos de padrões que contêm isometrias inversas e cujo subgrupo de isometrias directas $G_+ = p_3$.

4º caso: Se $G_+ = p_2$ ⁸



Célula unitária e célula fundamental do grupo de simetria p_2 .

⁸As reflexões que são simetrias da célula fundamental têm a ver com o facto da célula unitária ser um rectângulo ou um losango. Para considerar os diversos casos (em número de 4), supomos que o grupo de translações de G admite como célula unitária $p = \langle P; u, v \rangle$ um quadrado.

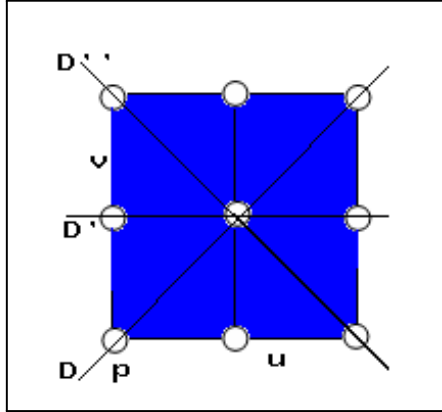
Neste caso,

- Ou tem-se $cm = \langle t_u, t_v, s_D, s_{D'} \rangle$,
- Ou tem-se $pm = \langle t_u, t_v, H_p, s_{D'} \rangle$,
- Ou tem-se $pmg = \langle t_u, t_v, H_p, s_{D''} \rangle$,
- Ou tem-se $pgg = \langle t_u, t_v, H_p, s_{D''}, \frac{v}{2} \rangle$.

(s_D , é uma simetria não da célula fundamental assinalada mas da célula fundamental do triângulo pqr).

5º caso: Se $G_+ = p_1$

Se G não contém rotações, isto é $G_+ = p_i$, as isometrias inversas que são simetrias da célula fundamental dependem de G admitir uma célula unitária rectangular ou rômbrica. Tal como no caso anterior, para incluir todos os casos na mesma figura representamos uma célula unitária de G por um quadrado.



Célula unitária e célula fundamental do grupo de simetria p_1 .

Neste caso,

- Ou tem-se $cm = \langle t_u, t_v, s_D \rangle$,
- Ou tem-se $pm = \langle t_u, s_D, s_{D'} \rangle$,
- Ou tem-se $pg = \langle t_u, s_{D, \frac{u}{2}}, s_{D', \frac{u}{2}} \rangle = \langle s_{D, \frac{u}{2}}, s_{D', \frac{u}{2}} \rangle$.

Ficam assim classificados os 12 grupos de padrões que contêm isometrias inversas que com os 5 grupos que só contêm isometrias directas formam o

Teorema 1.25. *Seja G um grupo cristalográfico,*

· Se $n = 3, 4, 6$ consideramos u um vector não nulo, $v = r_{\frac{2\pi}{n}; 0}(u)$ e $P(p; u, v)$:

$$p_6 = \langle t_u, r_{\frac{2\pi}{6}; p} \rangle;$$

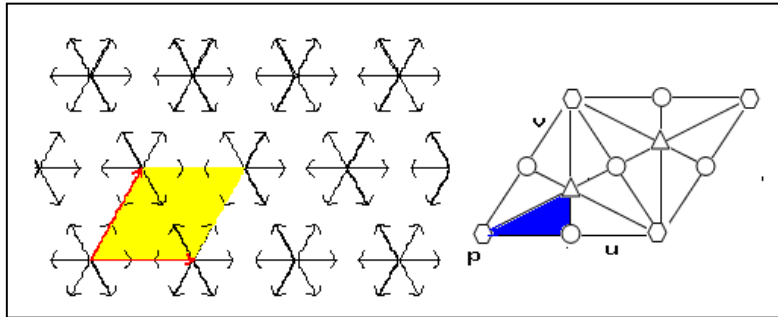
$$p_6m = \langle t_u, s_{\frac{2\pi}{6}; p}, s_D \rangle, \text{ } D \text{ recta que contém uma diagonal de } P;$$

$$p_4 = \langle t_u, r_{\frac{2\pi}{4}; p} \rangle;$$

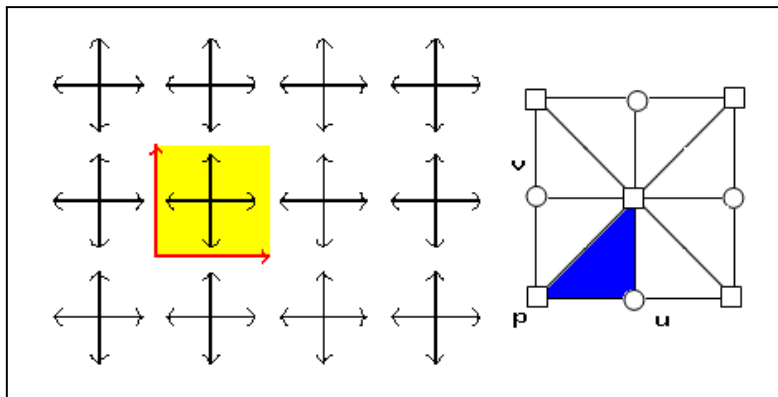
- $p4m = \langle t_u, r_{\frac{2\pi}{4};p}, s_D \rangle$, D recta que contém uma diagonal de P ;
 $p4g = \langle t_u, r_{\frac{2\pi}{4};p}, s_{D'} \rangle$, D' recta paralela a uma diagonal de P e que só contém dois centros;
 $p3 = \langle t_u, r_{2\pi;p} \rangle$;
 $p3m1 = \langle t_u, r_{\frac{2\pi}{3};p}, s_D \rangle$, D a recta que contém a diagonal maior de P ;
 $p31m = \langle t_u, r_{\frac{2\pi}{3};p}, s_{D'} \rangle$, D' a recta que contém a diagonal maior de P ;
 · Se $n = 2$ temos:
 $p2 = \langle t_u, t_v, H_p \rangle$ onde (u, v) são linearmente independentes;
 - se p_2 tem uma célula unitária $P(p; u, v)$ rômbrica:
 $cm = \langle t_u, t_v, H_p, s_D \rangle$, D é a recta que contém uma diagonal de P ;
 - se p_2 tem uma célula unitária $P(p; u, v)$ rectangular;
 $pmm = \langle t_u, t_v, H_p, s_{D'} \rangle$, D' é a recta que contém um lado de P ;
 $pmg = \langle t_u, t_v, H_p, s_{D''} \rangle$, D'' recta perpendicular a u que passa no ponto $p + \frac{\vec{u}}{4}$;
 $pgg = \langle t_u, t_v, H_p, s_{D''}, \frac{v}{2} \rangle$;
 · Se $n = 1$ temos:
 $p1 = \langle t_u, t_v \rangle$ e $P(p; u, v)$;
 -se p_1 tem uma célula unitária $P(p; u, v)$ rômbrica:
 $cm = \langle t_u, t_v, s_D \rangle$, D é a recta que contém uma diagonal de P ;
 -se p_1 tem uma célula unitária $P(p; u, v)$ rectangular;
 $pm = \langle t_u, s_D, s_{D'} \rangle$, D é a recta que contém um lado de P , D' é paralela a D e contém uma mediana de P ;
 $pg = \langle t_u, s_{D, \frac{u}{2}}, s_{D', \frac{u}{2}} \rangle = \langle s_{D, \frac{u}{2}}, s_{D', \frac{u}{2}} \rangle$, D recta que contém um lado de P , D' é paralela a D e contém uma mediana de P .

Ilustrações. Vejamos uma análise mais pormenorizada de cada um destes grupos, complementando-a com ilustrações.

- $p6m = \langle t_u, s_{\frac{2\pi}{6};p}, s_D \rangle$, D recta que contém uma diagonal de P ;
 Contém rotações de ordem 6, de ordem 3, de ordem 2 e reflexões;
 Os eixos das reflexões formam um ângulo de $\frac{\pi}{3}$;
 Alguns centros de rotação encontram-se nos eixos de reflexão, outros não.
 A rede é do tipo hexagonal.

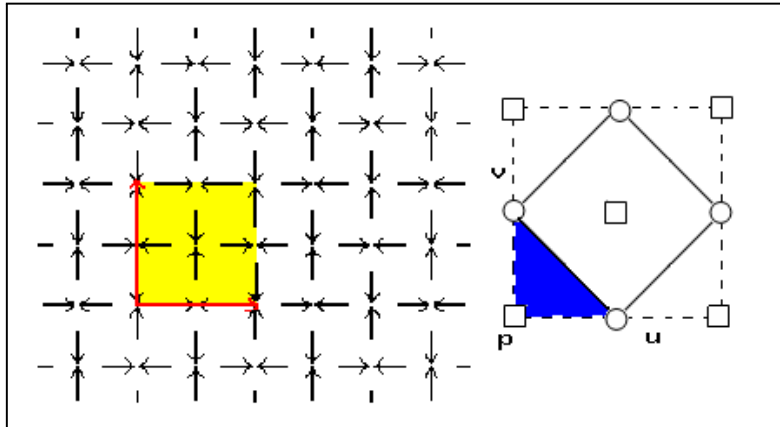
Grupo de simetria $p6m$.

- $p4m = \langle t_u, r_{\frac{2\pi}{4};p}, s_D \rangle$, D recta que contém uma diagonal de P ;
- Contém rotações de ordem 4 de ordem 2 e reflexões;
- Os centros de reflexão encontram-se nos eixos de reflexão
- A rede é do tipo quadrada.

Grupo de simetria $p4m$.

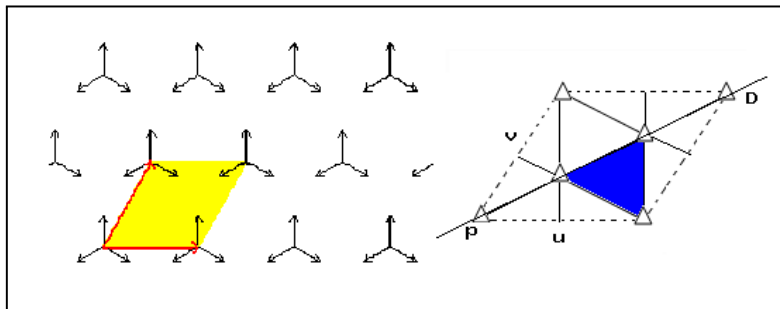
- $p4g = \langle t_u, r_{\frac{2\pi}{4};p}, s_{D'} \rangle$, D' recta paralela a uma diagonal de P e que só contém dois centros;
- Contém rotações de ordem 4 de ordem 2 e reflexões;
- Os eixos de reflexão são perpendiculares.

A rede é do tipo quadrada.



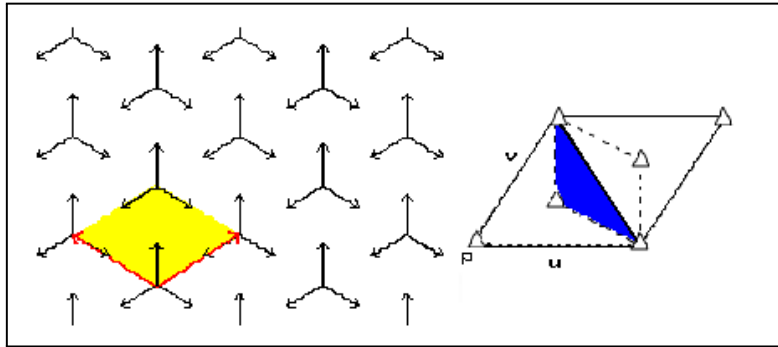
Grupo de simetria p4g.

- $p3m1 = \langle t_u, r_{\frac{2\pi}{3};p}, s_D \rangle$, D a recta que contém a diagonal maior de P ;
- Contém rotações de ordem 3 e reflexões;
- Os eixos das reflexões formam um ângulo de $\frac{\pi}{3}$;
- Os centros de rotação encontram-se todos nos eixos de reflexão.
- A rede é do tipo hexagonal.



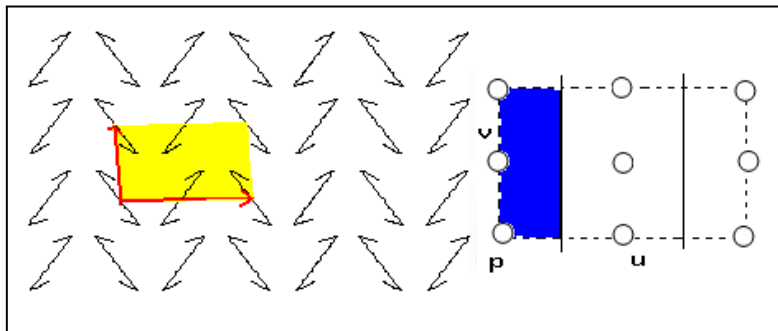
Grupo de simetria p3m1.

- $p31m = \langle t_u, r_{\frac{2\pi}{3};p}, s_{D'} \rangle$, D' a recta que contém a diagonal maior de P ;
- Contém rotações de ordem 3 e reflexões;
- Os eixos das reflexões formam um ângulo de $\frac{\pi}{3}$;
- Alguns centros de rotação encontram-se nos eixos de reflexão, outros não.
- A rede é do tipo hexagonal.



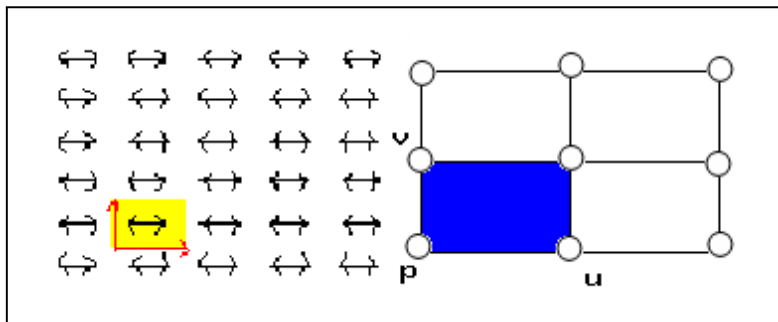
Grupo de simetria p31m.

o $cmm = \langle t_u, t_v, H_p, s_D \rangle$, D é a recta que contém uma diagonal de P ;
 Eixos de reflexão perpendiculares e rotações de ordem 2;
 Os centros de rotação não se encontram nos eixos de reflexão.
 A rede é do tipo rômbrica.



Grupo de simetria cmm.

o $pmm = \langle t_u, t_v, H_p, s_{D'} \rangle$, D' é a recta que contém um lado de P ;
 Contém eixos de reflexão perpendiculares e rotações de ordem 2.
 A rede é do tipo rectangular.

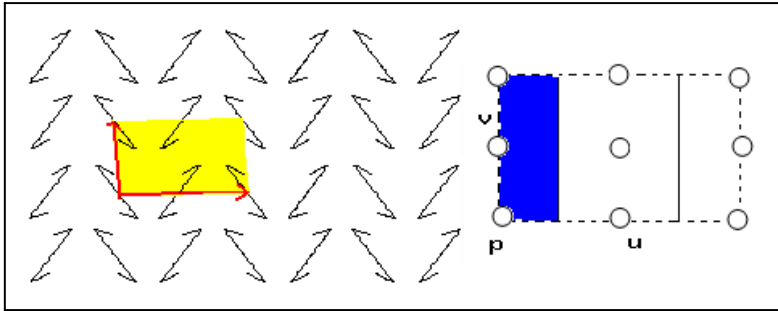


Grupo de simetria pmm.

◦ $pmg = \langle t_u, t_v, H_p, s_{D''} \rangle$, D'' recta perpendicular a u que passa no ponto $p + \frac{u}{4}$;

Contém reflexões, reflexões deslizantes e rotações de ordem 2.

O tipo de rede é rectangular.



Grupo de simetria pmg.

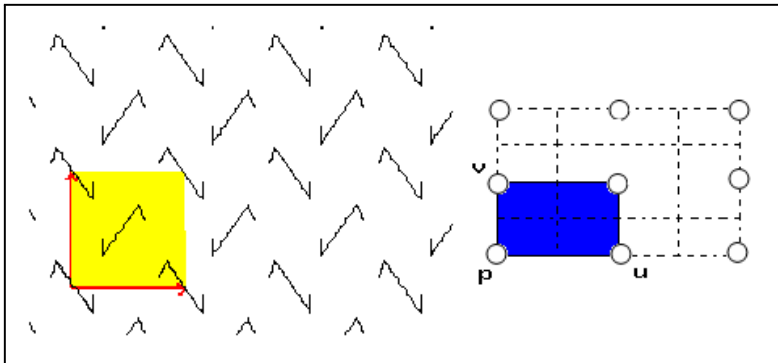
◦ $pgg = \langle t_u, t_v, H_p, s_{D''}, \frac{v}{2} \rangle$, D'' recta perpendicular a u que passa no ponto

$p + \frac{u}{4}$;

Contém reflexões deslizantes e rotações de ordem 2;

Os centros de rotação não se encontram nos eixos de reflexão que são perpendiculares.

A rede é do tipo rectangular.



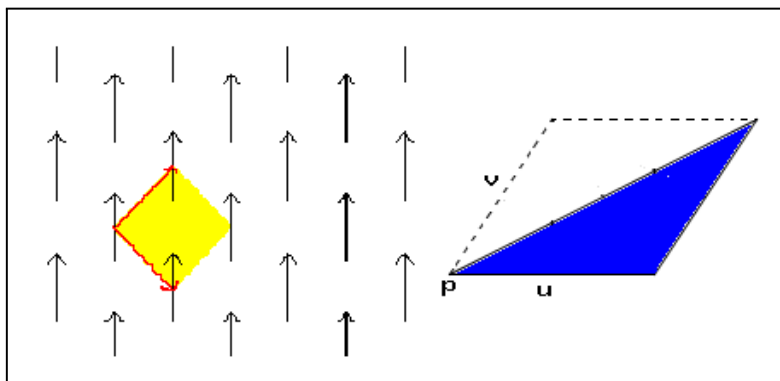
Grupo de simetria pgg.

◦ $cm = \langle t_u, t_v, s_D \rangle$, D é a recta que contém uma diagonal de P ;

Contém reflexões e reflexões deslizantes com eixos paralelos;

Os eixos de reflexão bissectam o ângulo formado pelas direcções das translações.

A rede é do tipo rômbrica.

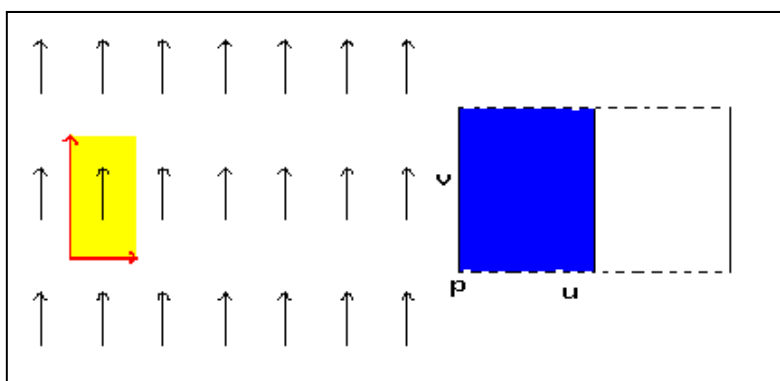


Grupo de simetria cm.

◦ $pm = \langle t_u, s_D, s_{D'} \rangle$, D é a recta que contém um lado de P , D' é paralela a D e contém uma mediana de P ;

Contém reflexões, cujos eixos são paralelos a uma direcção da translação e perpendiculares à outra.

A rede é do tipo rectangular.

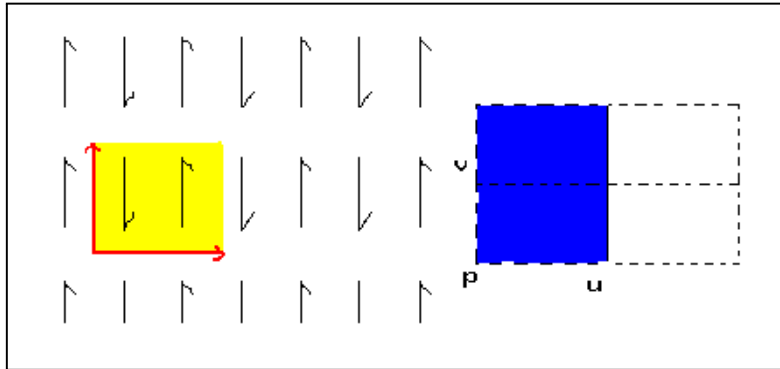


Grupo de simetria pm.

◦ $pg = \langle t_u, s_{D, \frac{u}{2}}, s_{D', \frac{u}{2}} \rangle = \langle s_{D, \frac{u}{2}}, s_{D', \frac{u}{2}} \rangle$, D recta que contém um lado de P , D' é paralela a D e contém uma mediana de P ;

Contém reflexões deslizantes, cuja direcção é paralela a uma direcção da translação e perpendicular a outra.

A rede é do tipo rectangular.



Grupo de simetria pg.

Classificados que estão os grupos discretos do plano euclidiano, propomos, como atividade, a identificação de cada um dos grupos discretos de isometrias do plano a seguir apresentados.

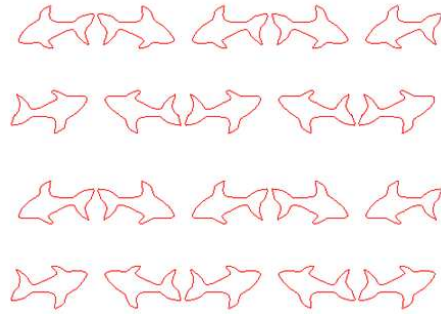


Fig 1

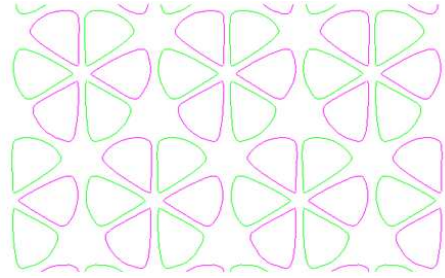


Fig 2

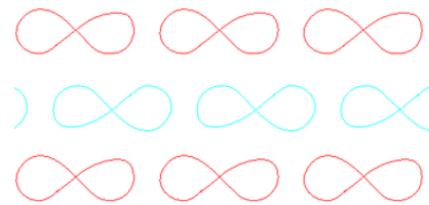


Fig 3

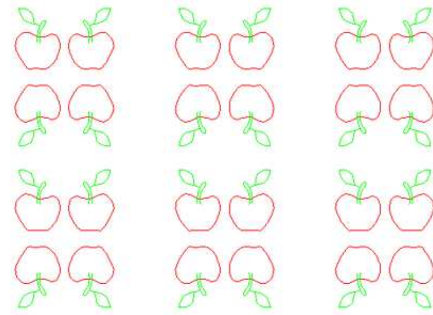


Fig 4



Fig 5

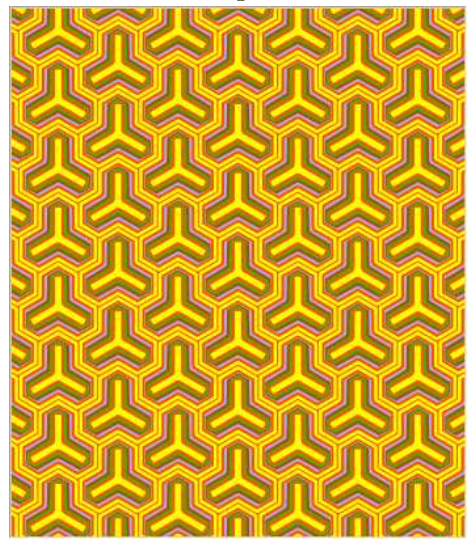


Fig 6



Fig 7



Fig 8

CAPÍTULO 2

À DESCOBERTA DE PADRÕES

1. Introdução

Finalizado o Capítulo 1, estamos aptos a identificar e classificar os subgrupos discretos do plano euclidiano, a que demos o nome de *grupos finitos*, *grupos de frisos* e *grupos de padrões*.

É possível observarmos estes subgrupos discretos nos mais variados locais: no estampar dos tecidos, nos tapetes de Arraiolos e Persas, (. . .) nas calçadas e nos azulejos, que revestem as paredes e tectos de palácios, conventos, mosteiros, igrejas, capelas solares e edifícios públicos. Estes últimos, os azulejos, serão o alvo principal do nosso estudo neste capítulo. Todavia, fazemos uma "breve incursão" pelas calçadas devido à importância que têm no panorama artístico e cultural.

Este capítulo está estruturado em quatro secções, além da introdução.

Apresentamos a segunda secção *Simetria na Arte Islâmica*, por julgarmos que esta teve uma importância preponderante na arte decorativa, sendo várias vezes referenciada, quer a nível dos padrões nacionais, quer a nível dos padrões internacionais. Estamos pensando por exemplo Alhambra em Granada, Espanha. Além de que foi durante a ocupação árabe da Península Ibérica que os povos ibéricos tomaram contacto com a cerâmica mural. Foi portanto através da poderosa influência exercida pelos povos de civilização Islâmica que esta vocação ornamental irradiou para a Europa a partir do século XV e se radicou sobretudo, nas regiões do sul.

Criamos uma subsecção "Alhambra", por a considerarmos uma referência, um expoente máximo da arte islâmica na Península Ibérica, tendo também influenciado a arte azulejar em Portugal, pois segundo reza a história, no ano de 1498 o rei de Portugal D. Manuel I viaja a Espanha e fica deslumbrado com a exuberância dos interiores mouriscos, com a sua proliferação cromática nos revestimentos parietais complexos, particularmente em Alhambra. É com o seu desejo de edificar a sua residência à semelhança dos edifícios visitados que o azulejo hispano-mourisco faz a sua primeira aparição em Portugal. O Palácio Nacional de Sintra, que serviu de residência ao rei, é um dos melhores e mais originais exemplos desse azulejo inicial ainda importado de oficinas de Sevilha em 1503.

Ainda recentemente o Diário de Notícias, na sua edição de 26 de Fevereiro de 2007, com o título *Matemática muito á frente explica mosaicos islâmicos*, dá conta de um artigo publicado na revista *Science*, onde o principal autor do

artigo, Peter Lu, investigador da Universidade de Harvard, nos EUA, refere que esses mosaicos geométricos “testemunham uma cultura mais sofisticada do que até agora se pensava”. E explica “régua e compasso permitem executar linhas simples, mas foi necessário um sistema mais complexo para explicar os mosaicos com uma simetria decagonal perfeita”. Segundo os autores a criação de um motivo individual é possível utilizando instrumentos rudimentares [tipo régua e compasso], porém para a sua reprodução até ao infinito sem distorções, não é possível e contrapõem “isso parece indicar que os matemáticos tiveram um papel preponderante na cultura árabe e muçulmana na Idade Média”.

Apresentamos a terceira secção *A evolução do Azulejo em Portugal* – não sendo este um trabalho na área da história das artes, nem tão pouco essa a nossa intenção, referenciamos apenas alguns aspectos da evolução do azulejo em Portugal, sendo que essa evolução está necessariamente ligada à evolução e classificação dos azulejos quanto á técnica o que justifica a introdução da secção seguinte *Classificação dos Azulejos*.

Na última secção *Identificação e Classificação de Padrões*, apresentamos em primeiro lugar, todo o processo de identificação e classificação de um padrão (o **p4m**) à luz do que foi estudado no Capítulo 1, (não o fazemos para todos já que o processo será idêntico e, tornaria o trabalho demasiado extenso). Introduzimos uma Subsecção – Calçadas–, visto nos exemplos que apresentamos posteriormente, para os vários grupos, aparecerem também fotos de calçadas dos pavimentos.

Depois apresentamos para cada um dos dezassete grupos de padrões do plano, em síntese, o seu grupo de simetria, seguidos da apresentação de gravuras que identificámos (azulejos e calçadas) como pertencentes ao respectivo grupo. Salienta-se o facto de não termos encontrado gravuras para todos os grupos. As gravuras são extraídas dos panoramas regional, nacional e internacional.

Nos padrões nacionais apresentamos alguns padrões de azulejos existentes no museu nacional do azulejo, nas colecções do Comendador Joe Berardo (existentes nas quintas: J.P. Vinhos e Quinta da Bacalhôa - a célebre mansão quinhentista justamente considerada como o mais importante repositório de azulejaria primitiva em Portugal (Simões, 1969). Nesta quinta podemos encontrar os azulejos dos tipos mudéjar e majólica), e outros identificados nos livros de Santos Simões ([10]). Apresentamos também alguns outros padrões existentes nas calçadas de Lisboa.

No que concerne aos padrões regionais e em relação à azulejaria, apresentamos alguns exemplos da colecção do Comendador Joe Berardo, existentes na Quinta Monte Palace; alguns exemplares da casa dos azulejos integrada na “Casa Museu Frederico de Freitas” e dos excelentes livros: “Azulejaria na madeira e na Colecção da Casa Museu de Frederico Freitas”, de Rafael Salinas Calado e “Azulejaria nos Açores e na Madeira” de J.M. dos Santos Simões ([10]).

Em relação aos padrões regionais utilizámos duas fontes para retirar as gravuras que apresentamos: a colecção existente na Quinta Monte Palace, do comendador Joe Berardo, disponível no sítio [www.berardotiles.com] e a colecção existente na casa dos azulejos integrada na Casa Museu Frederico de Freitas.

Constatamos que são nas técnicas de produção mais arcaicas, conhecidas por mudéjares, que abundam os padrões geométricos. Talvez a herança do passado devido à sua proveniência – o Islamismo e à proibição imposta pelo Corão de representar seres vivos.

Segundo Simões (1963), praticamente todos os Museus portugueses de Arte ou de História conservam e expõem azulejos mudéjares, já colhidos nas respectivas regiões, já obtidos por ofertas ou adquiridos por compra.

Os núcleos museológicos mais importantes onde se expõem este tipo de azulejos mudéjares são:

- (1) Em Lisboa – **Museu do Azulejo**, antigo Convento da Madre de Deus, Xabregas. Dependência do Museu Nacional de Arte Antiga. É o primeiro Museu monográfico de azulejos, sendo o seu Fundo constituído pelas colecções guardadas desde 1883 no Museu das Janelas Verdes. A azulejaria Levantina – séculos XV e XVI – agrupada em uma sala, está representada por exemplares provenientes de Beja (antigo Convento da Conceição), de Coimbra (da Sé Velha), de Évora, havendo não poucos, cujas proveniências se ignora.
- (2) Em Lisboa – **Museu da Associação dos Arqueólogos Portugueses** (edifício Histórico do Carmo) – A colecção de azulejos mudéjares não é vasta, mas contém alguns exemplares valiosos pela raridade. Ignora-se a sua proveniência, tendo sido, na maioria, incorporados no Museu quando da fundação em 1863.
- (3) Em Coimbra – **Museu Machado de Castro** – A colecção de azulejaria é rica em exemplares do século XVI. A maioria provém da sé Velha, havendo igualmente azulejos recolhidos de outras igrejas de Coimbra e da região. Destaca-se, pela sua importância:
 - (a) Brazão do Bispo-Conde D. Jorge de Almeida, em azulejos de aresta, certamente encomendado pelo Prelado em Sevilha, aquando das obras de decoração da Sé Velha, entre 1503 e 1520.
 - (b) Azulejos com as iniciais F e Y, de corda seca, trazidos de Sevilha pelo antigo Director, Dr. Virgílio Correia. Tais azulejos pertenceram a uma encomenda dos Reis Católicos, Fernando e Isabel, com destino às obras do Alcazar.
- (4) Em Beja – **Museu Regional** (antigo Convento da Conceição) – A colecção azulejar pode considerar-se de notável, expondo-se exemplares Levantinos e mudéjares, na sua maioria provenientes do próprio convento da Conceição.

- (5) Em Guimarães – **Museu Alberto Sampaio** – A colecção azulejar não é extensa no que respeita a peças arcaicas, sendo no entanto de notar algumas pela sua raridade.

Juntamos à lista, a já referida “Casa-Museu de Frederico de Freitas”, situada na rua da Calçada de Santa Clara, no Funchal.

Percorrendo-se Lisboa, encontra-se a azulejaria contemporânea nas estações da rede do Metropolitano, construídas na década de oitenta do século passado: na estação das Laranjeiras, o trabalho de Sá Nogueira; na estação Alto dos Moinhos, a obra de Júlio Pomar; na estação do Colégio Militar, o trabalho de Manuel Cargaleiro e na estação Cidade Universitária, a obra de Helena Vieira da Silva. Em estações construídas posteriormente – como a da Praça da Espanha, a de São Sebastião, a do Parque e a do Marquês do Pombal –, a arte dos azulejos também se fez presente, evidenciando suas potencialidades de reactualização como suporte estético. É exactamente esta dimensão inovadora que se encontra na obra produzida por Ivan Chermaveff para o Oceanário de Lisboa, na qual são incorporados elementos da fauna marítima em conjuntos de azulejos de padrão pintados à mão.

2. Simetria na Arte Islâmica

Os padrões eram muito utilizados na civilização islâmica, civilização esta que nos apresenta uma arte riquíssima. A arte islâmica não é restrita a um único país ou a um povo em particular. Ela é formada pela combinação de circunstâncias históricas tendo sido assimilada pela arte e cultura de diversos povos conquistados ao longo de vários séculos.

A religião islâmica foi elemento fundamental na formação dos estados árabes, razão pela qual política e religião conviveram lado a lado. O Islamismo não permite o uso de figuras humanas em manifestações artísticas, facto que fez com que os árabes desenvolvessem a arte abstracta das figuras simétricas. A motivação passou a ser os arranjos geométricos, nos quais os árabes tanto se distinguiram. Eles desenvolveram toda a técnica nessa área sem saber que usavam conceitos matemáticos avançados em relação à pavimentação do plano.

Referindo-se à técnica de decoração geométrica da arquitectura islâmica em geral e à de Alhambra em particular e, atendendo ao facto dos fundamentos teóricos só aparecerem cinco séculos mais tarde, com o aparecimento da teoria dos grupos, o Professor Rafael Pérez Gómez, da universidade de Granada, apelida-a de *Teoria Ingénua de Grupos* ([4]).

Com a expansão do Islamismo, os mosaicos de características essencialmente romanas ganharam novos contornos e características no mundo árabe.

Da pedra dura passaram ao uso de *peças cerâmicas esmaltadas e formato capaz de garantir sua reprodução até o infinito*. Mais à frente, na Secção (4),

veremos a evolução/classificação do azulejo segundo a técnica ao longo dos tempos.

Do legado deixado por estes povos na Península Ibérica, destacam-se dois monumentos em Espanha, a *Mesquita de Córdoba* e *Alhambra* em Granada. Sobre a Mesquita de Córdoba, propomos no Capítulo 3, Secção (4), como exercício, a identificação dos tipos de frisos existentes nas sete gravuras. Em relação a Alhambra, dedicamos a subsecção seguinte:

2.1. Alhambra. Alhambra (de Granada) foi declarada património da humanidade no ano de 1984. A breve justificação que figura na catalogação diz:

“El bien incluye logros artísticos únicos. Es un testimonio excepcional de la España musulmana del siglo XIV. Oferece un ejemplo valioso de las residencias árabes del medievo”.

A construção de Alhambra iniciou-se durante o reinado de Yusuf (1333-1353) e permanece ainda hoje como expoente elevado entre as maravilhas do mundo islâmico.

Alhambra é, sem sombra de dúvida, o vestígio mais impressionante da presença muçulmana na Península Ibérica, situa-se em Granada, Espanha. É um dos palácios mais relevantes da arquitectura islâmica. É o palácio fortaleza dos seus governantes de então. A figura (2.1) mostra a grandiosidade de Alhambra.



FIGURA 2.1. Imagem extraída da Internet, do sítio <http://www.alhambra.info/>, (no dia 15 de Abril de 2007), elucida bem, pela sua volumetria, a grandiosidade de Alhambra.

Alhambra tem sido, ao longo dos tempos (com mais incidência a partir de finais do **século XIX**, altura em que se começou a desenvolver a teoria dos grupos) fonte de inspiração quer para matemáticos (Prof. Grünbaum a Prof^{ra}. Edith Mülher, Bossard, Prof. Coxeter e o Prof. Rafael Pérez Gómez), quer para artistas, como por exemplo M.C. Escher (propomos, no Capítulo 3, uma actividade de investigação sobre o mesmo).

Alhambra merece um destaque especial neste trabalho por duas razões: a primeira, já a referenciámos antes, a segunda é que para alguns estudiosos,

contém os dezassete grupos de padrões do plano; aliando o facto dos artistas da época sem possuírem conhecimentos matemáticos da teoria dos grupos (pois só muito mais tarde é que Fedorov, em 1891, na Rússia provou a existência dos 17 grupos de Padrões) terem reproduzido em seus trabalhos todos os padrões.

Matemáticos como, R.P. Gómez, afirmam que Alhambra é o único monumento do mundo construído antes do desenvolvimento da *Teoria dos Grupos* e que contém na sua decoração geométrica os 17 grupos de simetria do plano.

“... e mais, a Alhambra é, actualmente, o único monumento construído antes do descobrimento da teoria dos grupos que conta com pelo menos um exemplar de cada um dos grupos cristalográficos planos”.(Gómez, 2004: XXXII), (tradução nossa).

Mas será que existe uma representação de cada um dos dezassete grupos de padrões em Alhambra? Bem, ao efectuar pesquisas neste sentido verificámos que alguns, especialistas em mosaicos não estão de acordo! Existe alguma controvérsia acerca de quantos grupos de padrões existem em Alhambra.

Publicações como a de Bossard, Y. "Rosaces, Frises et Povages"(vol. 1 e 2), Ed. CEDIC 1979, afirmam a existência dos dezassete grupos de padrões. Não obstante, autores de prestígio como o Prof. Grünbaum a Prof^a. Edith Mülher, e o Prof. Coxeter afirmam, em seus trabalhos, só terem encontrado treze dos grupos referidos, [4]. Afirmam que faltam os grupos: p_2 , pg , pgg e $p3m1$. Parece ser consensual, pelo menos, para a maioria dos especialistas, a existência dos outros treze grupos de padrões. No intuito de esclarecer esta situação o Prof. Rafael Pérez Gomes¹ efectuou uma visita a Alhambra, em busca dos grupos em falta, fotografando todo o que pudesse ter as características dos grupos em falta. Identificou os quatro grupos em falta, que nós apresentamos mais à frente na Secção (5).

3. A Evolução do Azulejo em Portugal

Segundo Meco (1985), os mais antigos exemplares portugueses de revestimento cerâmico aplicados à arquitectura são os pavimentos medievais formados por placas de barro de formas geométricas, coloridas através da mistura de corantes diversos ao vidro de óxido de chumbo (Zarcão), usados especialmente nas abadias cistercienses. Toda a abadia de Alcobaça apresentava pavimentos deste tipo, talvez do século XIII.

Segundo Santos Simões (1963) "...teria começado ainda no século XV mas é a partir de 1500 que se afirma com mais intensidade passando a fazer-se sistematicamente até 1550. É de Sevilha que Portugal importa a azulejaria com que enfeita as obras manuelinas e joaninas. Essa importação consignada nos florais"

([2]).

¹Professor do Departamento de Matemática Aplicada. Universidade de Granada.

Apresentamos de seguida uma síntese da evolução do azulejo português, desde o período dito *arcaico*, até aos nossos dias.

A utilização do azulejo remonta à antiguidade, no período do Antigo Egipto, região da Mesopotâmia, desenvolvendo-se por um vasto território com a expansão islâmica pelo norte de África e sul da Europa, penetrando na Península Ibérica no século XVI por mãos mouras que levam consigo a origem do termo actual.

A palavra actual “azulejo” formou-se através de “zulij” que apareceu em Espanha e pronunciava-se “az’lij” e no século XIII passou à palavra que hoje conhecemos. “Azulejo” fixou-se na Península Ibérica no século XIV. Em Portugal este nome foi assimilado ao produto aquando da importação do azulejo da Andaluzia no final do século XV.

Por outro lado,

"(...) entende-se a arte dos azulejos como um artefacto cultural que é, concomitantemente produzido e produtor das culturas, fruto de um conjunto de práticas de significação que estão permanentemente reactualizando-se, refazendo-se. É este incessante e conflitivo processo de rerepresentação –materializado em igrejas, conventos e palácios construídos em séculos anteriores, como também em construções das últimas décadas em Portugal e no Brasil – que torna a arte dos azulejos um elemento interessante para análise no campo educacional"

(Hal apud Knijnik e Wanderer, 2004, p: 18).

Em Portugal desde há seis séculos que a azulejaria ocupa uma posição de destaque entre as artes decorativas em geral e na arquitectura, em particular. É certo que ao longo dos tempos sofreu múltiplas influências, porém desenvolveu características específicas entre as quais merecem aqui referência: a riqueza cromática, a monumentalidade, o sentido cenográfico e a integração na arquitectura.

Portugal deu um importante contributo no desenvolvimento do azulejo. Com a expansão de Portugal, o azulejo chegou ao Brasil e às colónias no final do séc. XV prolongando-se, até aos dias de hoje. No segundo quartel do século XVIII assistiu-se a um aumento sem precedentes do fabrico de azulejos, o que se ficou, também, a dever a grandes encomendas chegadas do Brasil. Apesar de a técnica não ser portuguesa o seu elemento mais característico foi a pintura da cerâmica, o que era ainda feita no séc. XVII, em azul-cobalto. O desenvolvimento desta arte deu-se devido às influências de Itália que estava associada à estética renascentista e maneirista. Estas técnicas em conjunto com a influência sevilhana e os factores socio-económicos de Portugal tornaram o azulejo como elemento de paisagem arquitectónica do séc. XVI.

No século XVI, após a ida a Espanha, onde foi jurado herdeiro de Castela, Leão e Aragão, o monarca D. Manuel viria a encomendar milhares de azulejos

sevilhanos para o seu palácio de Sintra. Também a Igreja procedeu à encomenda de azulejos para o revestimento das superfícies parietais de muitos dos seus templos, de que é possível destacar a Sé Velha de Coimbra, a igreja de São Paulo de Frades, perto da mesma cidade, a cripta da igreja de Jesus em Setúbal ou ainda a sala do capítulo do convento da Conceição de Beja. No convento de Santa Clara, Funchal, a aplicação efectuou-se nos pavimentos.

Muitas das técnicas utilizadas na fabricação e aplicação da azulejaria foram instituídas pelos artífices portugueses, especialmente a partir do final do século XVI, quando dificuldades económicas enfrentadas pelo país não permitiam acesso a tapeçarias, vitrais e mármore.

Assim, o azulejo passou a ser utilizado como material decorativo. É neste período que a arte dos azulejos passa a incorporar composições geométricas: as combinações em xadrez: os *azulejos enxaquetados* ou de *azulejos de caixilho* veja-se a figura (5.1) que com suas linhas oblíquas decompõem e modelam as superfícies onde se encontram aplicados os azulejos – e os "tapetes", formados pela repetição de padrões policromos. Porém, por influência da produção holandesa, que por sua vez apresentava similaridades com a nova porcelana chinesa, ao final do século XVII a policromia foi sendo substituída pelo monocromatismo, produzindo então vários padrões de "tapetes" pintados nas cores azul e branco. (Knijnik e Wanderer, 2004, p.18).

Para que o "azulejo português" se consolidasse e enriquecesse começaram a utilizar talha dourada junto com as aplicações de azulejos que resultou do convívio com os povos orientais. Esta arte durou até fins do séc. XVII.

Era nos azulejos que retratavam cenas Bíblicas ou cenas mitológicas, mas foi após o terramoto de 1755, durante a reconstrução da cidade, que o Marquês de Pombal incentivou a produção de azulejos, que constituíam material barato, higiénico e resistente. Surgem os revestimentos com azulejos de padronagem policroma, com desenhos simples mas decorativos que ficaram definitivamente ligados à arquitectura pombalina. Após o terramoto proliferaram por todo o País, e particularmente em Lisboa, painéis de azulejos com imagens de santos, que eram colocadas nas fachadas dos edifícios a pedir protecção contra as catástrofes.

A Madeira no Séc. XVI começou a importar os azulejos, esses produtos cerâmicos que vinham não só de Espanha, como das fábricas nacionais de molde peninsular.

Tudo leva a crer que os primeiros azulejos que chegaram ao Funchal são os de 1514 para o coruchéu da Sé, figura (2.2) do qual existe documento.

São azulejos monocromos, sem relevo de fabrico nacional, como parece pela carta de D. Manuel de 2 de Agosto de 1574, ao vigário da Sé [2].

Na carta escrita por D. Manuel, em 1514, ao cabido da Sé do Funchal, o rei diz: “*Quanto ao Coruchéu da igreja de fun-chall que queeres saber a maneira de que aveemos por beem que se faça respondemos que seja de ladrilho e nam de madeira e de fora com seus azullejos e façase asy bõ e em tall perfeiçam como de vos confiamos que o saberees mandar fazer*”. (Santos Simões, 1963, págs. 177-181 apud Calado, 1999, pág. 24)

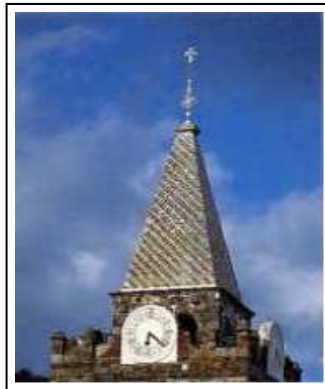


FIGURA 2.2. Coruchéu da Sé do Funchal. Foto extraída do livro de Calado, pg 24.

Para um estudo mais aprofundado e de cariz mais histórico, sugerimos as obras: [1], [2] e [8], que de resto, foram também preciosas fontes de pesquisa para esta secção².

4. Classificação dos Azulejos

Os azulejos não foram sempre como os conhecemos hoje em dia, aliás basta olhar para os monumentos centenários, passaram por um processo de evolução ao longo dos tempos, como de resto, quase tudo o que nos rodeia.

Merece aqui, fazer uma referência às varias técnicas de azulejos que surgiram, ao longo dos tempos e em diferentes partes do mundo. Esta informação encontra-se disponível, por exemplo, em [25]

²Aconselhamos ainda, a consulta dos sites:

www.gosk.com/BR/Toledo/-949895/pages/Azulejo/1915_pt.htm,

www.Oazulejo.net/oazulejo.html

e

<http://pt.wikipedia.org/wiki/Azulejo>

Azulejos Alicatados

Este tipo de azulejos chegou a Portugal em meados do século XV, vindo do Sul de Espanha, das oficinas mouriscas (daí a designação de Hispano-árabes). Caracterizam-se por serem grandes placas de barro cobertas de vidro colorido uniforme, que uma vez cozidas eram cortadas, com um alicate, em forma poligonal, sendo depois encaixadas umas nas outras, formando um mosaico, veja-se a figura (2.3). Este era um processo moroso e difícil além de exigir que o artífice acompanhasse a encomenda até ao local da sua aplicação. O tamanho das placas e a necessidade do artífice ter de acompanhar a encomenda impossibilitavam a exportação do produto. O que justifica os escassos exemplares existentes em Portugal. Dos existentes, os mais famosos são os do palácio de sintra, capela e quarto onde esteve preso D. Afonso VI³.



FIGURA 2.3. **Sintra, Paço Real**-Pavimento da capela, formado por uma composição de alicatado, ou mosaico cerâmico, polémico quanto à data e origem da técnica, possivelmente do séc. XV. Gravura extraída do livro "Azulejaria Portuguesa", p: 9 [?].

³Fonte: <http://oazulejo.net/oazulejo.html>



FIGURA 2.4. Azulejo Alicatado. Palácio de Sintra



FIGURA 2.5. Azulejo de Corda-Seca, Séc. XV. Extraída do sítio www.eb23-paulo-gama.rcts.pt/disciplinas/educ-tecnologica/azulejo-portugal/az.html em 25/06/2006.

Já no final do século XVI ocorre uma transformação que leva ao aparecimento do azulejo tal como hoje é conhecido: uma placa de barro quadrangular com uma face vidrada lisa ou decorada com desenhos coloridos. Surgem os

Azulelos de Corda Seca

Aparecem no final do séc. XV, caracterizam-se por reunirem na mesma placa o desenho e as cores. A *técnica de corda seca* – é o processo mais antigo de separação das cores em azulejos, na qual era feito nas placas de barro ainda fresco, o desenho através de incisões e após uma prévia cozedura, seria colocado, sobre a ranhura, o óleo de linhaça e o óxido de manganés, sobre uma corda marcando as linhas cruzadas que, durante a cozedura, faria com que as diferentes cores não se juntassem.

Azulejos de Aresta (ou Cuenca)

Este tipo de azulejo aparece pouco tempo depois dos azulejos de corda-seca, quando os desenhos geométricos se sucederam aos desenhos renascentistas, mais elaborados. Apareceu depois de uma outra inovação, a *fritagem*, que consistia no aquecimento dos vidrados a altas temperaturas antes de serem aplicados. É um processo de separação das cores através de pequenas arestas

em alto relevo obtidas sobre pressão, em barro ainda fresco, através de molde permitindo que as cores não se misturassem, durante a cozedura. Era mais prático e barato.



FIGURA 2.6. **Azulejo de aresta**, num Banco do Pátio do Leão, no Palácio Nacional de Sintra. Extraída do sítio www.eb23-paulo-gama.rcts.pt/disciplinas/educ-tecnologica/azulejo-portugal/az.html, em 25/06/2006.

Estes dois últimos tipos de azulejos, ficaram conhecidos ao longo dos tempos por: *mudéjares*, *Hispano-árabes* ou *hispano-mouriscos*. Durante o século XVI, foram importados grandes quantidades para Portugal que foram aplicadas em igrejas e palácios. Alguns exemplares ficaram célebres como os azulejos de "corda seca" representando a esfera armilar, encomendados por D. Manuel I e que ainda hoje revestem o Pátio das Carrancas, no Palácio de Sintra.

Azulejos Majólica

Este tipo de azulejos chegou a Portugal durante o Séc. XVI, vindo de Itália. A *majólica* veio revolucionar a produção do azulejo pois permite a pintura directa sobre a peça já vidrada. Após a primeira cozedura é colocada sobre a placa um líquido espesso (branco opaco) à base de esmalte estanífero (mistura de estanho, óxido de chumbo, areia rica em quartzo, sal e soda) que vitrifica na segunda cozedura. O óxido de estanho dá à superfície uma coloração branca translúcida na qual é possível aplicar directamente o pigmento solúvel de óxidos metálicos. Os pigmentos são absorvidos de imediato e o azulejo é novamente colocado no forno a uma temperatura mínima de 850°C.

Esta técnica permitiu uma maior facilidade na produção de desenhos mais complexos, porém *devido ao gosto dos consumidores peninsulares, habituados*

aos azulejos relevados de motivos repetitivos, que estavam bem implantados e continuavam a ser utilizados em grandes quantidades até meados do século [séc XVI], a produção de azulejos de majólica foi praticamente abandonada (Meco, 1989, p: 9).

Para um estudo mais aprofundado sobre o azulejo, nomeadamente *técnicas de decoração e tipos de decoração temática*, sugerimos, por exemplo, a consulta dos seguintes sítios na Internet:

http://glosk.com/BR/Toledo/-949895/pages/Azulejo/1915_pt.htm

<http://pt.wikipedia.org/wiki/azulejo>

É claro que após estas técnicas de produção mais arcaicas surgiram as técnicas de produção semi-industriais, a partir do século XIX, e mais recentemente as industriais.

Actualmente, a procura por azulejos tem se dado menos por seu valor decorativo e mais por suas características impermeabilizantes, sendo muito utilizado em cozinhas, banheiros e demais áreas hidráulicas.

Neste trabalho, do ponto de vista do tipo de decoração/temática, os azulejos que interessam são os *azulejos de padrão*, isto é, azulejos em grupos de 2×2 até 12×12 , que formam um determinado motivo e que, depois de repetidos várias vezes, formam um padrão. Como exemplo deste tipo de azulejos apresentamos os *azulejos de tapete*. São azulejos que aparecem na maioria das vezes em revestimento mural, e que, pela multiplicação de determinados modelos resulta num padrão policromático. Muitas vezes estes padrões são completados com frisos ou barras dispostas em seu redor chamadas *cercaduras*, (ver por exemplo, figura (2.8), nesta secção e figura (5.1), na secção seguinte), dando ao seu todo o aspecto de um tapete.

Apresentamos abaixo duas gravuras: uma referente a azulejo de tapete (fig (2.7)), disponível no sítio

<http://www.oazulejo.net/oazulejo.html>

e outra referente a azulejo padrão (fig 2.8), disponível no sítio

<http://pt.wikipedia.org/wiki/Azulejo>

5. Identificação e Classificação de Padrões

A actividade de identificar e classificar um padrão pode tornar-se muito complexa se não estivermos de posse de um processo para sistematicamente encontrar as diversas simetrias existentes no padrão, eliminando assim a pouco e pouco algumas hipóteses. O processo usado nesta Secção para a classificação dos padrões é o algoritmo apresentado por Washbur e Crowe, que está no final do trabalho, no Anexo, Secção – Algoritmos (??).



FIGURA 2.7. Azulejo de tapete, do séc. XVII. Hospital Sta. Marta, Lisboa.



FIGURA 2.8. Azulejos de padrão com faixa no Paço de São Cipriano, Tabuadelo.

Esta Identificação/classificação não é tão simples como parece, porque muitos padrões são constituídos por vários padrões mais pequenos.

Para facilitar a identificação dos vários grupos podemos construir uma rede ou reticulado de pontos, para isso basta partir de um ponto qualquer e considerar as imagens desse ponto por meio de todas as translações de simetria do padrão. Assim a cada padrão fica associada uma *rede característica* de pontos. As unidades do padrão constituídas por *paralelogramos* cujos vértices são pontos da rede associada a um padrão chamam-se *células primitivas* do padrão ou apenas *células*, e tal como foi referido no capítulo 1 tem de ter comprimento minimal.

Como refere Veloso (1998, p: 201), para identificar padrões “há que abstrair da cor, e considerar o padrão monocromático. Isso significa que estamos apenas a considerar a forma do motivo, e não o modo como está colorido.

Podemos imaginar que o padrão é em primeiro lugar desenhado, apenas, e depois colorido. A nossa classificação refere-se apenas à primeira fase.

Outra consideração a fazer quanto à análise matemática dos padrões é o facto de abstrairmos das pequenas imperfeições que a maior parte dos desenhos deste tipo incluem [alguns também devido ao desgaste em consequência do passar dos anos], mas que naturalmente não são de considerar no nosso estudo. Percebe-se sempre a intenção do artista ou do artesão, quando repete um motivo. Percebemos se a pequena variação é acidental ou deliberada, [como é possível observar em algumas das gravuras que a seguir apresentamos] sobretudo se examinarmos com atenção o resto do padrão”.

Procedemos de seguida à identificação e classificação dos grupos de padrões. Por razões óbvias (não tornar o trabalho demasiado extenso) vamos proceder à identificação “passo a passo” de apenas um dos dezassete grupos de padrões do plano – **o grupo p4m**.

Para isso “estudemos” o padrão da figura (2.9). A rede característica de pontos é *quadrada*. Salientamos o facto de ser possível construir várias redes emanando de pontos distintos, como se pode ver na figura (2.10). Para cada uma delas facilmente se identifica o *paralelogramo fundamental*⁴ (que é minimal) que por translações pode “pavimentar” o plano⁵.

Na continuação do nosso estudo vamos considerar a rede associada aos pontos a vermelho (*rede quadrada*, como atrás foi dito).

Uma vez construídas a rede facilmente se identifica a *célula unitária* (ou o *paralelogramo fundamental*) que podemos observar na figura (2.11). Os vértices da célula coincidem com os pontos da rede.

Posto isto, identificamos as isometrias que existem na célula. Olhando para o padrão vemos que além de simetrias de rotação de grau 2 e grau 4, tem simetrias de reflexão e de reflexão deslizante.

Na figura (2.12), estão assinalados (os símbolos, cheios a preto, por estarem situados sobre os eixos de reflexão) os centros de rotação da célula.

Observe-se a sequência de imagens da figura (2.13)⁶.

⁴Do mesmo modo que é possível construir mais do que uma rede (do mesmo tipo) passando por pontos distintos, também é (consequentemente!) possível construir mais do que um paralelogramo fundamental. A este propósito veja-se actividade (10), Secção (4), no Capítulo 3.

⁵Colocámos a palavra pavimentar entre aspas, propositadamente, para remeter o leitor para a Secção Pavimentações que se encontra no Anexo.

⁶Na figura (2.13), a gravura **G** representa a imagem original extraída do livro de Santos Simões (referenciado na legenda da figura (2.9)), com uma rotação de, aproximadamente, 210°.



FIGURA 2.9. Grupo de Padrão $p4m$. Este padrão foi adaptado do Livro de Santos Simões “Azulejaria em Portugal nos Séculos XV e XVI”. Estampas. Imagem *a*, pg: XXIV. Azeitão – Quinta da Bacalhôa.

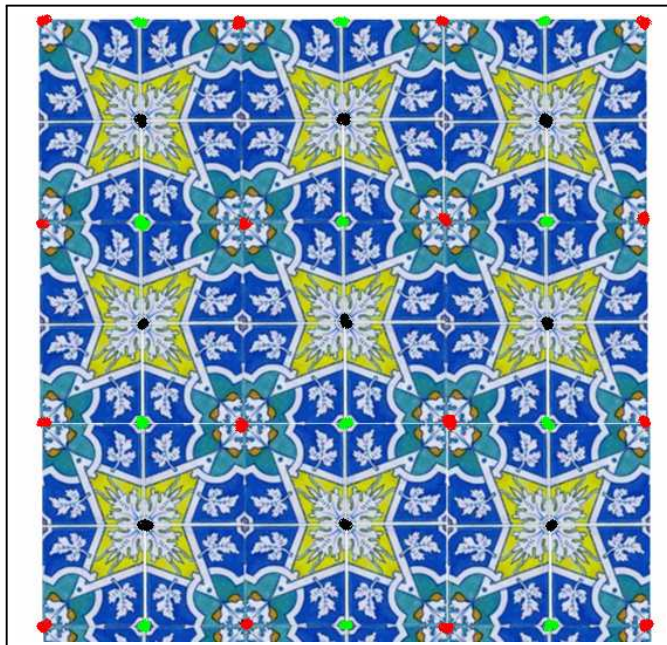


FIGURA 2.10. Três redes partindo de pontos distintos.



FIGURA 2.11. Célula unitária.

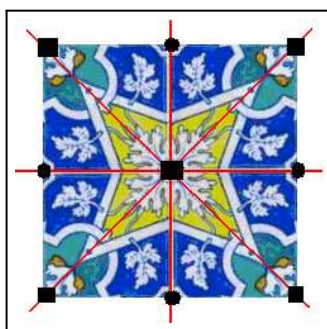


FIGURA 2.12. Centros de Rotação, de grau 2 e 4, sobre os eixos de reflexão.

Olhando para a figura (2.12), e munidos do algoritmo de Washburn e Crowe, facilmente se exclui algumas hipóteses e se chega ao grupo $p4m$. A menor rotação é 90° ; existe uma reflexão; existem reflexões cujos eixos de reflexão fazem um ângulo de 45° .

Se combinarmos as simetrias geradas pelas translações associadas aos dois vectores u e v , linearmente independentes, obtemos o desenho da figura (2.14). Compondo indefinidamente o padrão nas duas direcções associadas aos dois vectores u e v obtemos o recobrimento do plano. E com isto terminamos o estudo deste grupo de padrão do plano, que denotamos por, **$p4m$** .

Na identificação dos restantes grupos, que passamos a apresentar, depois da subsecção –Calçadas–, utilizamos o mesmo método, munidos é claro, do algoritmo de Washburn e Crowe.

Tal como foi referido na introdução, motivados pelo facto de algumas das calçadas que pavimentam os passeios dos espaços públicos conterem padrões,



FIGURA 2.13. Simetrias de rotação de grau 4, eixos de simetrias de reflexão e de reflexão deslizante da célula.

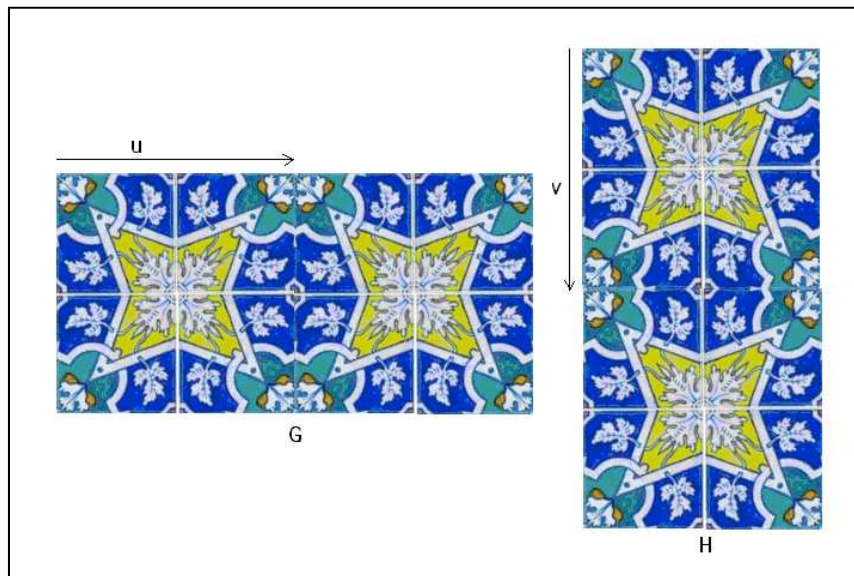


FIGURA 2.14. **G** – simetria de translação da célula segundo o vector u ; **H** – simetria de translação da célula segundo o vector v .

como de resto se pode ver, nas figuras que apresentamos/identificamos abaixo, achámos por bem fazer um parêntesis para introduzir a subsecção,

5.1. CALÇADAS. A Câmara Municipal de Lisboa e a Sociedade Por-

tuguesa de Matemática têm um acordo para classificar e completar as simetrias existentes nas calçadas que pavimentam a cidade, em consequência de um estudo preliminar feito por dois alunos bolsiros do Programa Gulbenkian – *Novos talentos em Matemática*⁷, com a coordenação da Professora Ana Canas Silva, professora associada no Departamento de Matemática do Instituto Superior Técnico. Deste estudo concluíram que existem, nas calçadas que pavimentam as ruas de Lisboa, pelo menos, 9 dos 17 grupos de padrões e 2 dos 7 possíveis grupos de frisos. Com base no livro de Ernesto Matos *Mesmo por Baixo dos Meus Pés—Uma viagem pela Calçada Portuguesa*, identificámos alguns padrões cujas imagens, extraídas do mesmo livro, apresentamos posteriormente nos respectivos grupos.

Os pavimentos decorados aparecem na Ilha da Madeira no século XIX. Aqui e, ao contrário do continente, numa fase inicial, os fundos são constituídos por pedras de basalto vulcânico preto e os contrastes constituídos por pedras de basalto branco. Isto deve-se à falta de basalto branco cá na região pois, esta tinha de ser importado das pedreiras do continente. Porém, hoje em dia, com a facilidade de importação associada ao desenvolvimento económico verificamos o contrário, isto é, fundo branco e contrastes a preto. A figura (2.15) mostra calceteiros a colocar esta pedra.

Em relação às calçadas regionais da ilha da Madeira não abundam muitos padrões.



FIGURA 2.15. Calceteiros Avenida Zarco, junto ao Ed. Governo Regional, Madeira (foto nossa, em 29/05/2006).

⁷O Programa *Novos talentos em Matemática* foi instituído em 2000 pela Fundação Calouste Gulbenkian com o objectivo de estimular entre os jovens o gosto, a capacidade e a vocação de pensar e investigar em matemática.

Este Programa distingue, anualmente, estudantes universitários de Matemática que evidenciem um elevado mérito académico e incentiva o desenvolvimento da sua cultura e aptidões matemáticas, apoiando o seu trabalho junto de reconhecidos especialistas, que exercem o papel de tutores.

Sobre a calçada portuguesa e, talvez, dando continuidade ao trabalho publicado no ano anterior (referimo-nos ao livro “Mesmo por Baixo dos Meus Pés - Uma viagem pela Calçada Portuguesa”), em 1999, Ernesto Matos escreveu:

“... Aplicando métodos tradicionais bem portugueses nas pavimentações, a Madeira e os Açores contribuem para que a beleza da calçada portuguesa continue a estampar o brilho e o encanto nesses passeios que nos encaminham por entre os labirintos das nossas vidas. Sem essa beleza, com certeza seríamos um povo mais triste, como tantos outros que, para além dos museus mantêm as ruas pobres de espiritualidade urbana ...”

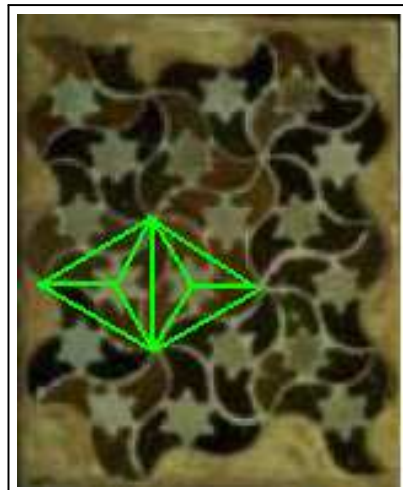
[Ernesto Matos, Tribuna – Funchal – 21 de Julho 2000, pg 18].

De seguida apresentamos, para cada um dos grupos de padrões, algumas gravuras que identificámos referentes a painéis de azulejos ou calçadas dos pavimentos. Estas gravuras foram extraídas de museus, de livros, de revistas de sites da Internet ou da nossa autoria. Em qualquer dos casos elas são sempre devidamente referenciadas e sempre que julgámos necessário foram efectuados os devidos pedidos de autorização.

O Grupo $p6$

O padrão $p6$ admite como transformações de simetria: rotações de graus 2, 3 e 6, além de translações. Só contém isometrias directas. A rede é hexagonal.

Seguindo o algoritmo de Washburn e Crowe: A menor rotação é $\frac{\pi}{3}$ e não existem reflexões.



Tipo: $p6$. Museu de Alhambra. Rafael Pérez Gómez. Um matemático passeia por Alhambra ([18]).

O Grupo $p6m$

O padrão $p6m$ tem rede hexagonal e todos os seus centros de rotação estão em eixos de reflexão.

Seguindo o algoritmo de Washburn e Crowe: A menor rotação é $\frac{\pi}{3}$ e existe uma reflexão.



Tipo: $p6m$. Padrão da calçada na Rua do Lobito. (fonte, livro ([6]), p:51).



Tipo: $p6m$. Palácio de Comares. Rafael Pérez Gómez. Um matemático passeia por Alhambra ([18]).

O Grupo $p4$

O padrão $p4$ não tem quaisquer reflexões, apenas tem simetrias de rotação, além das de translação. Só contém isometrias directas. As simetrias de rotação são de graus 2 e 4. A rede é quadrada.

Seguindo o algoritmo de Washburn e Crowe:

O Grupo $p4m$

Este padrão distingue-se do anterior pelo facto de ter, além das simetrias de rotação de graus 2 e 4, simetrias de reflexão e de reflexão deslizante.

Seguindo o algoritmo de Washburn e Crowe:

A menor rotação é $\frac{\pi}{2}$. Existe uma reflexão. Existem reflexões cujos eixos fazem um ângulo de $\frac{\pi}{4}$.



Tipo: **p4m**. Alhambra: Jardins novos de Generalife, passagem de pedra.
Fonte www.cambridge2000.com/.../html/PC1110437e.html (em 20 de Abril de 2007).



Tipo: p4m. Rua 1º de Dezembro (fonte: livro ([6]), pg: 79).



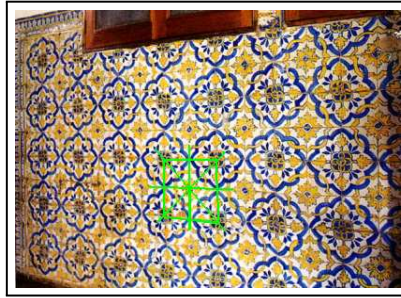
Tipo: **p4m**. Calçada na Rua do Quelhas (fonte: livro ([6]), pg: 22).



Tipo: **p4m**. Avenida Arriaga, Funchal, (foto nossa, em 29/03/2007).



Tipo: **p4m**. Corpo da Igreja Paroquial de São Pedro, Funchal. Edificada em 1598, esta igreja é particularmente notável pelos revestimentos azulejares que recebeu durante o século XVII (S. Simões, 1963 apud Calado, 1999). Esta composição sugere o “enxaquetado” em azul e branco. Disponível no livro ([1]).



Tipo: **p4m**. Igreja Matriz de Nossa Senhora da Conceição. Também existe na Capela de Jesus, Maria José, no Lombo do Doutor, no Conselho da Calheta, Madeira. Imagem extraída do livro ([1]), p:80.



Tipo: **p4m**. Padrão “tapete 2x2”. Português, séc. XVII. Inv. n. os 1.22 e 1.108. Casa-Museu Frederico de Freitas.



Tipo: **p4m**. Padrão “tapete maçaroca 2x2”. Português, transição séc. XVII/XVIII. Demolição Funchal Inv. n. os 1.2 e 1.89. Casa—Museu Frederico de Feitas.



Tipo: **p4m**. Rua S. Fernando. Entrada Oeste da cidade de Santa Cruz, Madeira (foto nossa, em 01/03/2007). Olhando o espaço envolvente apercebemo-nos que foram recolocados num passado recente, todavia o tipo de desenho é muito parecido com os da Igreja Matriz de Nossa Senhora da Conceição, figura (5.1), cuja data de construção remonta a 1708 (Simões, 1963). Não foi possível saber a proveniência.

O Grupo p4g

Este grupo tem rede quadrada, tem simetrias de reflexão, de reflexão deslizante e rotações de grau 2 e 4. Os centros de rotação estão sobre os eixos de reflexão.

Seguindo o algoritmo de Washburn e Crowe:

A menor rotação é $\frac{\pi}{2}$. Existe uma reflexão. Não existem reflexões cujos eixos fazem um ângulo de $\frac{\pi}{4}$.

O Grupo p3

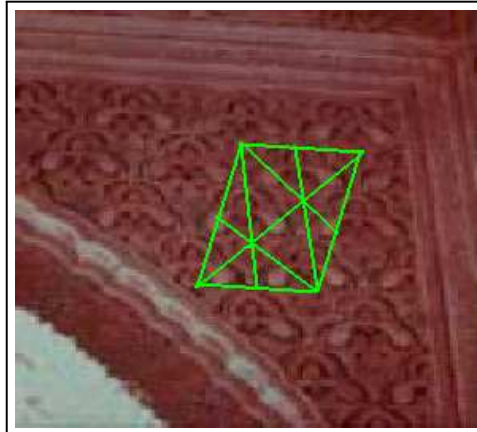
O padrão p3 tem rede hexagonal e o seu grupo de simetria tem rotações de grau 3, além de translações. Só contém isometrias directas.

Seguindo o algoritmo de Washburn e Crowe: A menor rotação é de $\frac{2\pi}{3}$; não existem reflexões.

O Grupo p3m1

O padrão p3m1 tem também rede hexagonal. Apresenta simetrias de reflexão e de reflexão deslizante, que surgem devido à simetria do motivo.

Seguindo o algoritmo de Washburn e Crowe: A menor rotação é de $\frac{2\pi}{3}$; existe uma reflexão e todos os centros de rotação estão sobre os eixos de reflexão.



Tipo: **p3m1**. Palácio dos Leões. Rafael Pérez Gómez. Um matemático passeia por Alhambra ([18]). É um dos quatro grupos (p2, pg, pgg e p3m1) que alguns matemáticos dizem faltar em Alhambra, mas que Gómez identifica.

O Grupo p31m

Este padrão é bastante parecido com o padrão anterior, o que tem provocado erros nas notações. A rede também é hexagonal e existem de novo simetrias de reflexão e de reflexão deslizante. Porém dois dos centros de rotação existentes na célula unitária do padrão não estão em eixos de reflexão, contrariamente ao que acontecia no padrão p3m1. Existe uma menor quantidade de reflexões deslizantes, como nos é dado a observar na figura (2.16).

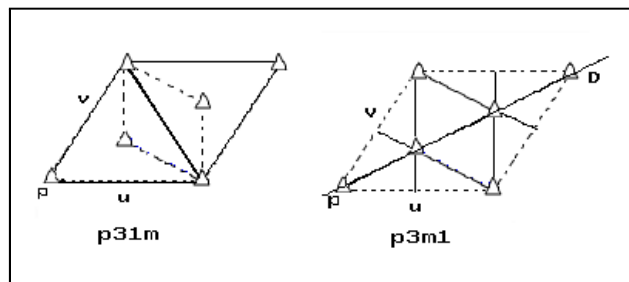
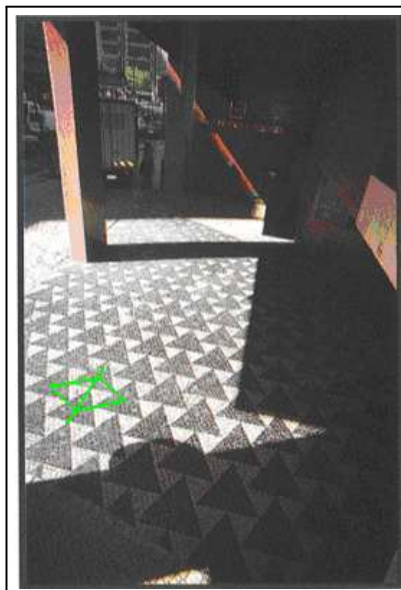


FIGURA 2.16. Centros de rotação existentes nas células unitárias dos padrões descritos.

Seguindo o algoritmo de Washburn e Crowe: A menor rotação é de $\frac{2\pi}{3}$; existe uma reflexão, mas nem todos os centros de rotação estão sobre os eixos de reflexão.

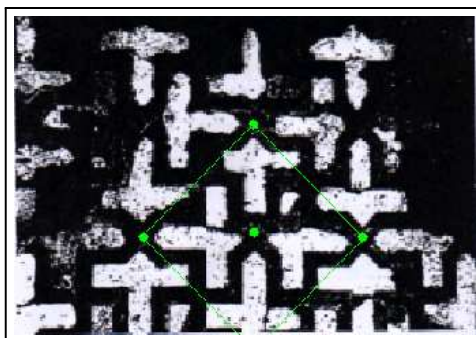


Tipo: p31m. Av. Miguel Bombarda (fonte: livro ([6]). pg: 48).

O Grupo p2

O padrão p2 tem rede paralela e o seu grupo de simetria tem rotações de grau 2, com centros sobre os eixos e no centro da célula (devido à própria simetria do grupo), além de translações. Só contém isometrias directas.

Seguindo o algoritmo de Washburn e Crowe: A menor rotação é de π ; existe uma reflexão mas não existe uma reflexão deslizante.



Tipo p2. Padrão identificado pelo Prof. Rafael Pérez Gómez em Alhambra. Pertence ao Museu da Alhambra, Registo nº 1361. Disponível em artigo do mesmo autor, Épsilon, 2ª Edição 1995. É um dos quatro grupos (p2, pg, pgg e p3m1) que alguns matemáticos dizem faltar em Alhambra, mas que Gómez identifica.

O Grupo cmm

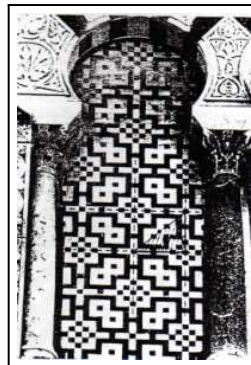
O padrão cmm tem reflexões e reflexões deslizantes, além de translações, no seu grupo de simetria. A rede é rômbrica e alguns centros de rotação de grau dois estão sobre eixos de reflexão.

Seguindo o algoritmo de Washburn e Crowe:

A menor rotação é de π . Existe uma reflexão. Existem reflexões em duas direcções. Nem todos os centros de rotação estão sobre os eixos de reflexão.



Tipo: cmm . Quinta Monte Palace, Funchal (foto nossa em 02/08/2006).



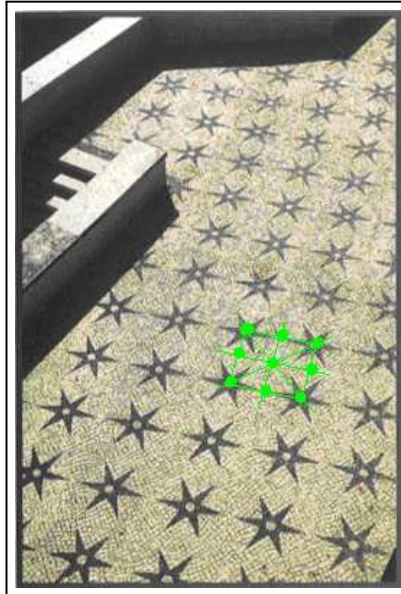
Tipo: cmm . Arco cego direito ou esquerdo do corpo superior da portada situada na 6ª cortina a contar do sul. Fachada oriental. Mesquita de Córdoba.

O Grupo pmm

Este padrão tem rede rectangular. Os lados e as mediatrizes dos lados da célula do padrão são eixos de reflexão. Existe também simetrias de rotação de grau 2 com centros sobre os eixos de reflexão.

Seguindo o algoritmo de Washburn e Crowe:

A menor rotação é π . Existe um eixo de reflexão. Existem reflexões em duas direcções. Estão todos os centros de rotação sobre os eixos de reflexão.



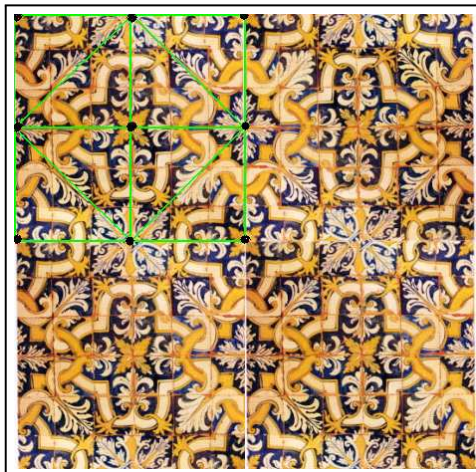
Tipo: pmm. Alto de St. Amaro (fonte: livro ([6]). pg: 49).



Tipo: **pmm**. Rua Júlio de Andrade (fonte: livro ([6]). pg: 23).



Tipo: **pmm**. Passeio da Rua Conde Carvalhal, junto à recente rotunda, Funchal (foto nossa em, 25/03/2007).



Tipo: **pmm**. Capela da Boa Morte e Baptistério da Igreja de S. Pedro, Funchal. Janela da sacristia da Capela de S. Baptista da Ribeira, Funchal. Capela do Santíssimo, Igreja Matriz, Machico. Padrão P37, P604 (restos de padrões), livro ([1]), p:114.



Tipo: **pmm**. Padrões “tapete têxtil 2x2”. Português, séc. XVII. Inv. n. os 1.43, 1.44 e 1.84. Casa-Museu Frederico de Freitas.

O Grupo **pmg**

Neste padrão existem simetrias de reflexão deslizante de eixos paralelos e simetrias de reflexão com eixos perpendiculares aos anteriores. Os centros de simetria de rotação, de grau 2, não estão sobre os eixos de reflexão.

Seguindo o algoritmo de Washburn e Crowe:

A menor rotação é π . Existe uma reflexão. Não existe reflexões em duas direcções distintas.

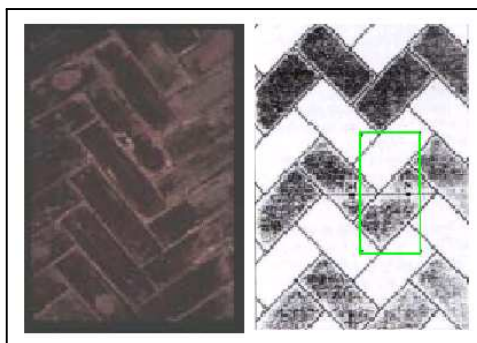


Tipo: **pmg**. Igreja de São Roque, Lisboa— Revestimento do subcoro, produzido em Sevilha e datado de 1596, compreendendo composições maneiristas e padronagem “ponta de diamante. Fonte: livro ([8]), p:15.

O Grupo **pgg**

Este grupo, para além das translações, possui rotações de grau 2 e reflexões deslizantes. Não tem reflexões.

Seguindo o algoritmo de Washburn e Crowe: A menor rotação é π . Não existe uma reflexão. Existe uma reflexão deslizante.

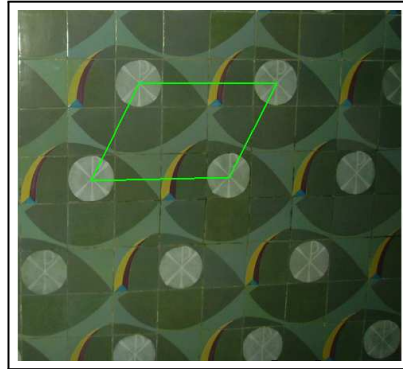


Tipo: **pgg**. Porta do vinho. Rafael Pérez Gómez. Um matemático passeia por Alhambra ([18]). É um dos quatro grupos ($p2$, pg , pgg e $p3m1$) que alguns matemáticos dizem faltar em Alhambra, mas que Gómez identifica.

O Grupo **p1**

Caracteriza-se pela ausência de rotações, reflexões e reflexões deslizantes.

Seguindo o algoritmo de Washburn e Crowe: Não existem rotações; não existem reflexões nem reflexões deslizantes.

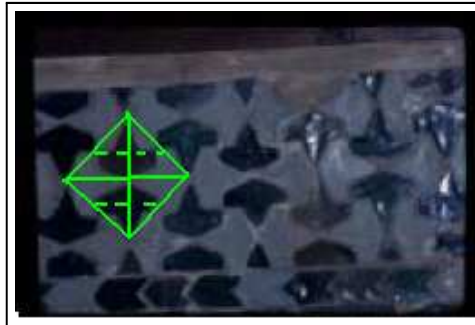


Tipo: **p1**. Igreja do Porto da Cruz, (foto nossa, em 04/02/2007).

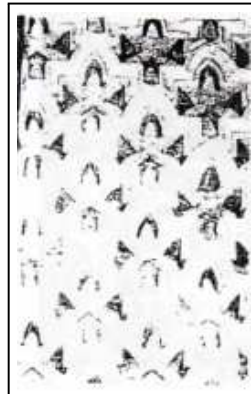
O Grupo **cm**

O padrão **cm** é um dos dois existentes com rede rômbrica. O grupo de simetria tem reflexões e reflexões deslizantes não triviais (assinaladas na figura a tracejado).

Seguindo o algoritmo de Washburn e Crowe: Não existe rotações; existe uma reflexão e existe uma reflexão deslizante cujo eixo não é de reflexão.



Tipo: **cm**. Museu de Alhambra. Rafael Pérez Gómez. Um matemático passeia por Alhambra ([18]).



Tipo: **cm**. Detalhe da decoração mudéjar, num muro da capela de São Pedro e São Lorenzo, Espanha.

O Grupo **pm**

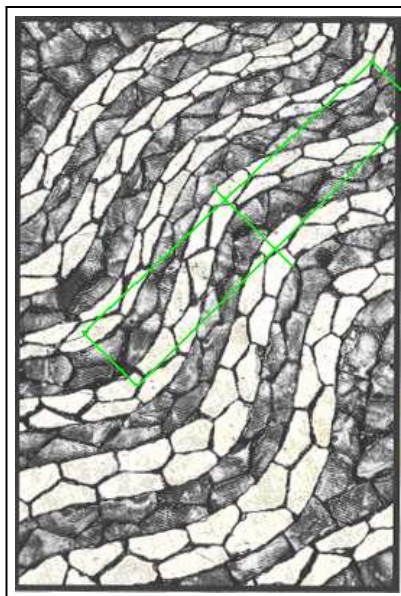
O grupo de simetria do padrão p1 não tem rotações, nem reflexões, nem reflexões deslizantes. É apenas um grupo de translações.

Seguindo o algoritmo de Washburn e Crowe:

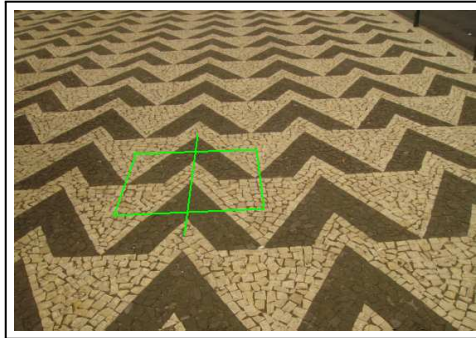
Não existe nenhuma rotação. Existe uma reflexão. Não existe uma reflexão deslizante cujo eixo não é de reflexão.



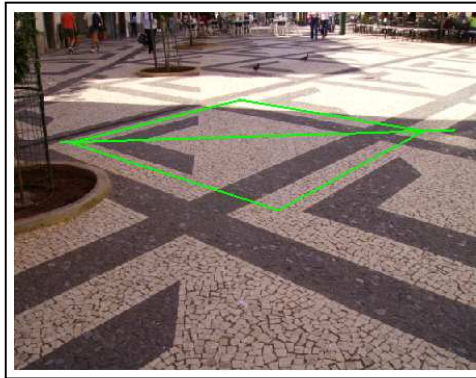
Tipo: pm. Jardim Zoológico (fonte: livro ([6]), pg: 82).



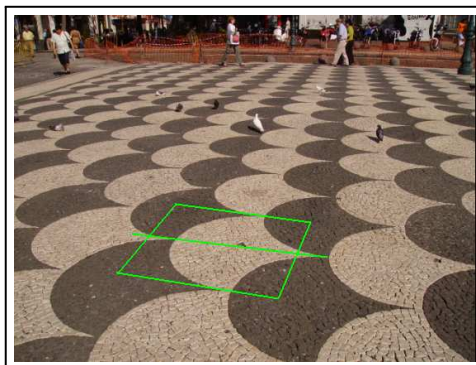
Tipo: pm. Praça do Império (fonte: livro ([6]), pg: 70).



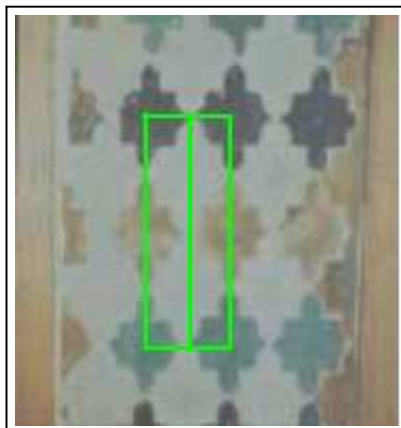
Tipo: **pm**. Largo Junto ao Odinet, Funchal (foto nossa em 29/03/2007)



Tipo: **pm**. Funchal (falta indicar o lugar) (foto nossa, em 26/05/2006).



Tipo: **pm**. Largo do Colégio, Madeira, (foto nossa, em 26/05/2006).



Tipo: **pm**. Museu de Alhambra. Rafael Pérez Gómez. Um matemático passeia por Alhambra ([18]).

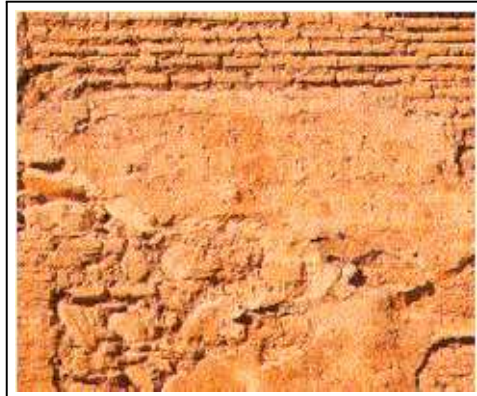


Tipo: **pm**. Alhambra, Pátio dos Leões. Fonte www.cambridge2000.com/.../html/PC1110437e.html (em 20 de Abril de 2007).

O Grupo **pg**

Este grupo tem rede rectangular, tem simetrias de reflexão deslizante. Não tem simetrias de reflexão.

Seguindo o algoritmo de Washburn e Crowe: Não existem rotações, não existem reflexões, mas existe uma reflexão deslizante.



Tipo: **pg**. Porta do vinho. Rafael Pérez Gómez. Um matemático passeia por Alhambra ([18]). É um dos quatro grupos ($p2$, pg , pgg e $p3m1$) que alguns matemáticos dizem faltar em Alhambra, mas que Gómez identifica.

O alvo principal da nossa apresentação são os grupos de padrões, todavia pelo facto de aparecerem muitos grupos finitos, em especial nas calçadas, apresentamos de seguida alguns que encontramos.

5.2. Padrões Finitos. O Grupo D2

Caracteriza-se por ter uma reflexão e rotações de ordem 2.



Tipo: **D2**. Passeio junto à Avenida Zarco, Funchal, Madeira (foto nossa, em 29/05/2006).

O Grupo D4

Caracteriza-se por ter uma reflexão e rotações de ordem 4.



Tipo: **D4**. Quinta Monte Palace, Madeira (foto nossa, em 02/08/2008).

O Grupo D12

Caracteriza-se por caracteriza-se por ter uma reflexão e rotações de ordem 12.



Tipo: **D12**. Adro da Igreja matriz de N^a Senhora da Piedade, Porto Santo (foto nossa em 03/06/2006).

O Grupo C4

Caracteriza-se por ter rotações de grau 4.



Tipo: **C4**. Porto Santo, largo junto à igreja matriz, (foto nossa, em 03/06/2006).

Não identificámos/encontrámos gravuras de azulejos ou calçadas para os grupos $p4$, $p4g$ e $p3$. Em contrapartida, encontrámos e identificámos muitos $p4m$, pmm e pm .

CAPÍTULO 3

UMA BREVE EXPLORAÇÃO DIDÁCTICA

1. Introdução

Não é nossa pretensão elaborar este capítulo com a minuciosidade que se espera de um trabalho na área das ciências da educação. Pretendemos, apenas, e como complemento ao trabalho desenvolvido nos capítulos 1 e 2, apresentar sugestões de actividades que podem (e devem, em nosso entender) ser desenvolvidas dentro/fora da sala de aulas, com recurso ou não, a programas de geometria dinâmica ou a materiais manipulativos, que podem mesmo ser construídos pelos professores ou pelos alunos.

Pretendemos assim, com estas sugestões de actividades, dar um contributo (ainda que pequeno) para que de futuro alunos e professores encarem o ensino na geometria de uma forma mais “positiva”. É que,

Segundo Ponte, Matos e Abrantes, (1998, p:164), existe uma convicção generalizada de que a geometria não é leccionada ou é tratada de um modo muito superficial, com uma grande ênfase nos procedimentos e na terminologia.

Porém,

Segundo Veloso (1998, p:198), desde algum tempo a esta parte se tem verificado a existência de actividades envolvendo padrões e pavimentações nos manuais escolares. Essas actividades aparecem com grau de dificuldade diferente adaptadas aos vários níveis de ensino. Por exemplo, os alunos podem tomar contacto com os frisos logo a partir do 1º ano de escolaridade. Este estudo [dos padrões] presta-se a um conjunto de actividades, ao longo dos ciclos e do secundário que, quer pela facilidade de apreensão do conceito, quer pelo forte apelo artístico e desenvolvimento das capacidades de observação presta-se a um trabalho interdisciplinar.

Passados que estão quase dez anos da publicação destes livros, constatamos que os manuais escolares tem evoluído de forma positiva no modo como tratam a geometria, propõem uma maior diversidade de actividades deveras interessantes e motivadoras quer para os professores quer para os alunos.

Após quase ano e meio a pesquisar/trabalhar neste tema Padrões Geométricos na Azulejaria, constatamos (pela abrangência do tema, pela quantidade e qualidade, dos livros, de revistas e de artigos publicados na Internet) que este tema proporciona um conjunto de actividades interessantes e aliciantes quer pelos conceitos matemáticos a reter quer pela facilidade com que este tema

pode ser relacionado com muitos aspectos da vida quotidiana e também por isso, a ser desenvolvido pelos alunos em várias disciplinas, coordenadas pelo professor de matemática. cremos, portanto que – o estudo dos grupos de simetrias do plano (grupos finitos, grupos de frisos e grupos de padrões) pode, e deve, ser abordado por todos os níveis de ensino da matemática.

Mas padrões porquê? Porquê estudar padrões? Qual a importância dos padrões no currículo dos alunos?

Respondemos a estas questões e, ao porquê de em nosso entender as actividades envolvendo padrões devam ser resolvidas nas aulas (referimo-nos ao dito no primeiro parágrafo), com algumas das ideias resultantes da investigação de Anthony Orton (1999), apud sítio ([27]), as quais sugerem que os padrões:

- Podem contribuir para a construção de uma imagem mais positiva da Matemática;
- Permitem o estabelecimento de conexões matemáticas;
- Atraem e motivam os alunos, porque apelam fortemente ao seu sentido estético e à criatividade;
- Permitem a promoção e desenvolvimento das capacidades e competências dos alunos;
- Ajudam a desenvolver a capacidade de classificar e ordenar informação;
- Permitem a compreensão da ligação entre a Matemática e o mundo em que se vive.

À semelhança dos capítulos anteriores, subdividimos este em secções. Quatro além da introdução. Existem actividades para realizar dentro ou fora da sala de aulas, com recurso ou não a programas de Geometria Dinâmica.

Deixamos ao critério do professor a selecção das actividades em função do nível de aprendizagem, bem como a elaboração formal das actividades em fichas de trabalho. Na primeira secção – **Construindo o Conceito de Simetria**, partimos da noção intuitiva que cada aluno possui do conceito de simetria e chegamos ao conceito matemático do tema, usando uma sequência de actividades. A terceira actividade é de carácter interdisciplinar. Propomos a construção de um Geoplano¹, pois sendo este um material manipulativo, aliado ao facto de poder ser construído por eles, merece aqui um certo destaque, já que constitui uma alternativa interessante à tradicional forma de ensino (livros, quadro preto e acetatos), facilitando a assimilação de certos conceitos de maneira mais divertida e menos cansativa. Na segunda secção – **Isometria do Plano**, onde o objecto principal de estudo é, como o nome indica, as isometrias do plano: *translações, rotações, reflexões e reflexões deslizantes*. Sugerimos um conjunto de actividades que o professor pode propor aos alunos para familiarizá-los com as isometrias. Muitas destas actividades podem ser

¹O Geoplano é uma ferramenta (material) Criada pelo matemático Inglês – **Caleb Gattegno**, que se supõe conhecido, pelo menos, pelas pessoas ligadas à matemática. Também existe em suporte digital.

desenvolvidas com recurso ao geoplano. No que concerne à secção três – **Classificando e Identificando as Simetrias do Plano**, propomos um conjunto de actividades que visam classificar e identificar rosáceas, frisos e padrões no plano. A classificação de cada uma das figuras simétricas faz-se identificando o conjunto de todas as isometrias que preservam a figura. No final do primeiro capítulo foi proposto como actividade de consolidação, a identificação de seis padrões e dois frisos. Tal como então foi noticiado apresentamos, no final desta secção a resposta. E a quarta secção – **Pavimentações**, onde se apresenta um conjunto de actividades para pavimentar o plano, por exemplo o chão de uma sala de aulas, e as pavimentações de Escher², cujos padrões apesar de não estarem relacionados com a azulejaria, não poderíamos deixar de referir, pois as suas pavimentações do plano são conseguidas recorrendo a isometrias. A primeira actividade é interdisciplinar, assim na aula de EVT ou de Educação Visual, em coordenação prévia com professora de matemática, os alunos deverão construir polígonos regulares, tais como: triângulo quadrado, pentágono hexágono (...), que serão úteis para a realização de algumas actividades seguintes.

Para concluir esta introdução resta-nos dizer que as actividades não são todas originais. Para além das actividades originais e das adaptadas de Veloso e Viana (1998), complementamos com actividades propostas por Caputi e Gerônimo, (2006), num trabalho intitulado "Descobrimo as Simetrias no Plano", ao qual também usámos como modelo para a distribuição das actividades, referimo-nos aos temas das secções. Estas encontram-se assinaladas com um *. Para uma leitura integral das actividades propostas por estes dois autores sugerimos (e recomendamos) a consulta no sítio

[http : //www.mat.ufg.br/bienal/2006/mini/caputi.roberto.pdf](http://www.mat.ufg.br/bienal/2006/mini/caputi.roberto.pdf).

2. Construindo o Conceito de Simetria

Nesta secção as actividades propostas têm como objectivos principais: conhecer a presença (ou não) da simetria das formas geométricas; “desenhar” figuras a partir do eixo de simetria; traçar um ou mais eixos de simetria presentes nas figuras; perceber que o eixo de simetria divide a figura em partes iguais.

Cada um de nós possui alguma concepção de simetria. Mesmo que a formação nesta área seja pouca ou nenhuma (como é o caso dos nossos alunos mais novos, do 1º ciclo), porém ao olharmos em nosso redor, identificamos algumas imagens como simétricas e outras como assimétricas, muitas vezes sem sabermos explicar o que queremos dizer com isso. As nossas sugestões de actividades começam precisamente por aqui.

²De seu nome Maurits Cornelis Escher, nasceu a 17 de Julho de 1898, em Leeuwarden, no norte da Holanda, sendo o filho mais novo do Engenheiro Civil G. A. Escher.

Escher dedicou grande parte do seu tempo ao estudo das pavimentações do plano. O seu interesse pelo tipo de arte que desenvolveu começou em 1936, quando viajou a Espanha e se maravilhou com padrões utilizados em Alhambra.

ACTIVIDADE 1:

Cada um de nós possui alguma concepção de simetria. Mesmo que a formação nesta área seja pouca ou nenhuma (como é o caso dos nossos alunos mais novos, do 1º ciclo) ao olharmos em nosso redor, identificamos algumas imagens como simétricas e outras como assimétricas, muitas vezes sem sabermos explicar o que queremos dizer com isso. As nossas sugestões de actividades começam precisamente por aqui.

Sugerimos que o professor faça uma recolha de fotos de revistas e jornais que contenham figuras simétricas e figuras assimétricas. De entre as simétricas que contenham translações, rotações, reflexões e reflexões deslizantes. Várias fotos de cada tipo. O professor deve agrupar este material em três ou quatro pastas que contenham várias fotos de cada tipo. Uma vez na sala o professor deve agrupar os alunos em grupos de três ou quatro e desenvolver a actividade:

Desenvolvimento *:

1ª Parte:

- Observar as fotos apresentadas;
- Separá-las em dois grupos, conforme as considerem simétricas ou não;
- Dividir as simétricas em dois grupos que lhes pareçam semelhantes;
- Quais foram os critérios utilizados?

2ª Parte:

- Comparar a classificação entre os vários grupos de trabalho;
- Os Critérios usados foram os mesmos?
- A partir dessas comparações, chegar à concepção matemática de simetria.
- Anotações:

ACTIVIDADE 2: (extra-aula)

Propor aos alunos que efectuem uma recolha de material (fotos, recortes, tecidos...) onde estejam evidentes figuras simétricas e figuras não simétricas. Estas deverão seguir o mesmo desenvolvimento da actividade anterior.

ACTIVIDADE 3:

Como terceira actividade propomos a construção de um Geoplano quadrado. Com esta actividade, pretendemos, pelo menos duas coisas: primeira, fomentar

a interdisciplinaridade, uma vez que propomos a sua realização nas aulas Educação Visual e Tecnológica (EVT); segunda, obtemos uma base de trabalho que nos será útil na exploração de actividades nesta e nas restantes secções deste capítulo. O Geoplano é uma excelente ferramenta para os alunos explorarem problemas geométricos, podendo registar o seu trabalho no papel pontilhado ou quadriculado. Uma das grandes vantagens é a sua mobilidade o que faz com que os alunos se habituem a ver as figuras em diversas posições. Outra das vantagens específicas do geoplano é que, ao contrário da folha de papel, é uma ferramenta dinâmica, permitindo “desenhar” e “apagar” rapidamente o que possibilita a aferição rápida de conjecturas.

Sugere-se a construção, de um geoplano na aula de EVT, por parte de cada aluno, com a ajuda do professor desta disciplina. Estes devem ter, obrigatoriamente, as mesmas medidas (para facilitar o objectivo para os quais são criados: apreensão dos conceitos simetrias, isometrias, rosáceas, frisos e grupos de padrões, bem como o trabalho em duplas ou em grupos de três ou quatro alunos, possibilitando a comparação de construções). Assim propomos a sua construção numa placa quadrada, de madeira ou aglomerado, de 30cm de lado. Sobre esta, deixando uma margem de 3cm para cada um dos quatro lados, construir uma malha quadriculada, de 1,5cm de lado. Finalmente, fixar os 256 pregos em cada um dos vértices, deixando-os todos à mesma altura (aproximadamente 1cm fora da madeira). Esta é a primeira parte do trabalho desenvolvido na disciplina de EVT, no entanto, após as actividades que se pretende sejam desenvolvidas nas aulas de matemática, e depois dos alunos estarem devidamente familiarizados com os conceitos pretendidos, o professor de matemática deve pedir aos alunos que escolham um motivo, para com ele construírem dois grupos de frisos distintos com que posteriormente e, novamente, na aula de EVT, deverão reproduzi-lo nas margens do geoplano dando-lhe assim um toque pessoal. Sugere-se, ainda, a sua exposição no final do período ou do ano.

ACTIVIDADE 4:

Desde a educação infantil a criança se depara com actividades de dobrar, recortar, girar e trasladar. Essas mesmas actividades podem ser utilizadas para introduzir a noção de simetria.

ACTIVIDADE 5:

Para ser resolvida em duplas.

No geoplano, cada aluno pode criar uma forma e pedir que o colega continue a figura, usando um elástico de outra cor, trocando entre eles os geoplanos. O

eixo de reflexão deve ser também de uma outra cor. Devem posteriormente marcar o desenho no papel pontilhado ou quadriculado.

ACTIVIDADE 6:

Sugere-se que o professor apresente, no geoplano ou no quadro, uma figura que tenha mais do que um eixo. Um quadrado por exemplo, que possui quatro eixos. O professor pede aos alunos que encontrem um eixo de simetria (geralmente encontram primeiro o eixo vertical), insiste-se que encontrem mais até que cheguem aos quatro eixos.

Para os alunos com mais dificuldades sugere-se, se necessário for, que o professor recorra a um espelho para ajudar os alunos a encontrar os eixos de simetria.

Em alternativa ao tradicional geoplano feito numa placa de madeira temos o Geoplano virtual cujo software encontra-se disponível, por exemplo em

<http://www.eb1-recovelas.rcts.pt/aplicacoes/geoplano/geoplano/geoplano.htm>

ou

<http://www.inf.ufsc.br/~edla/projeto/geoplano/software.htm> ,

onde os alunos podem aceder e fazer as suas construções. As figuras (3.1) e (3.2) abaixo, mostram dois trabalhos efectuados por alunos dos 3º e 4º anos, de escolas do concelho da Maia disponibilizadas no blog das mesmas escolas no sítio

<http://prozela.blogspot.com/search/label/simetria>,

Com a apresentação destas figuras pretendemos por um lado mostrar o potencial desta ferramenta, e por outro mostrar também que alunos dos terceiro e quarto anos já conseguem assimilar o conceito de simetria.

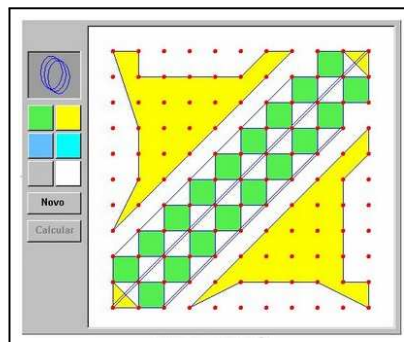


FIGURA 3.1. A

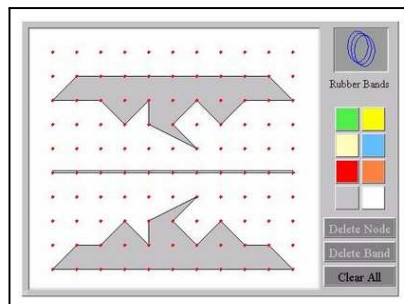


FIGURA 3.2. B

ACTIVIDADE 7:

- (1) Procurar, em manifestações artesanais ou artísticas, tradicionais ou não, figuras em que se reconheçam simetrias. Por exemplo: em calçadas portuguesas, azulejos, tapetes de arraiolos, rendas de bilros, fachadas de edifícios, recortes dos jornais ou revistas, etc.
- (2) Reproduzir algumas dessas figuras, em desenho livre, desenho geométrico, fotografia, colagens, etc.
- (3) Identificar o elemento que se repete e os “movimentos” necessários à sua repetição.

3. Isometrias do Plano

Já sabemos que as isometrias do plano são transformações do plano que preservam a distância entre pontos. Antes de falarmos sobre estas transformações, vamos considerar uma definição mais geral que conceitua isometrias entre dois planos quaisquer.

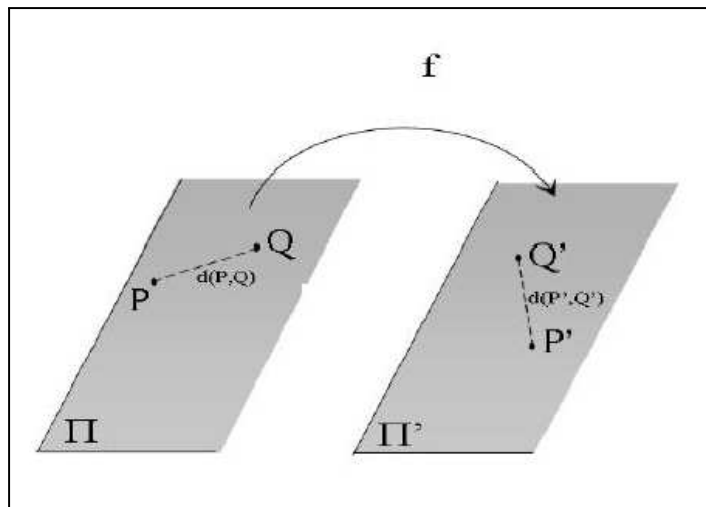
Definição 3.1. *Uma aplicação $f : \Pi \longrightarrow \Pi'$ de um plano Π em um plano Π' é denominada de **isometria** se, dados dois pontos quaisquer P, Q em Π , a distância entre P e Q é igual à distância entre $P' = f(P)$ e $Q' = f(Q)$, ou seja $\overline{PQ} = \overline{P'Q'}$.*

ACTIVIDADE 1*:

Uma transformação definida por dois planos paralelos

Passos:

- Desenhe dois planos paralelos Π e Π' .
- Desenhe uma recta r secante a um dos planos (e portanto, secante ao outro).
- Considere a função $f : \Pi \longrightarrow \Pi'$, $f(X) = X'$, onde X' é a intersecção de Π' com a recta paralela a r passando por X . Escolha e desenhe alguns pontos em Π e encontre as imagens correspondentes desenhando-as no plano Π' .

FIGURA 3.3. Π e Π' são dois planos.

· Verifique que f é uma isometria observando que, para quaisquer P, Q em Π a distância entre P e Q é igual à distância entre $P' = f(P)$ e $Q' = f(Q)$ em Π' (observe que, por construção, o quadrilátero $PQ P' Q'$ forma um paralelogramo.

· Anotações:

ACTIVIDADE 2*:

Nem toda a transformação é uma isometria: Uma aplicação definida entre dois planos perpendiculares.

Observação 3.1. A propriedade de preservar distância é uma condição bem restritiva. Vejamos como é simples construir uma aplicação que não satisfaz esta propriedade.

Passos:

· Desenhe dois planos perpendiculares Π e Π' e a recta r intersecção destes dois planos.

· Considere a função $f : \Pi \rightarrow \Pi'$, $f(X) = X'$, onde X' é a projecção ortogonal de X sobre r .

· Encontre dois pontos P, Q em Π , tais que a distância entre P e Q é igual à distância entre $P' = f(P)$ e $Q' = f(Q)$ em Π' .

· Encontre dois pontos P, Q em Π , tais que a distância entre P e Q é diferente da distância entre $P' = f(P)$ e $Q' = f(Q)$ em Π' .

- Conclua que f não é isometria.
- Porque o terceiro item não é suficiente para concluir que f é uma isometria?
- Anotações:

ACTIVIDADE 3*:

A função constante

Passos:

- Desenhe dois planos perpendiculares Π e Π' .
- Escolha um ponto A do plano Π' .
- Considere a função $f : \Pi \longrightarrow \Pi'$, $f(X) = A$
- Quanto mede a distância entre as imagens de dois pontos de Π ?
- f é uma isometria?
- Anotações:

Antes de continuar com outros exemplos, vejamos uma propriedade das isometrias que nos será útil mais adiante. Esta propriedade já foi demonstrada no capítulo 1, todavia apresentamo-la aqui como actividade.

ACTIVIDADE 4*:

Toda a isometria transforma rectas em rectas.

Nesta actividade veremos que uma isometria transforma necessariamente uma recta de um plano em uma recta de outro plano.

Passos:

- Tome dois planos Π e Π' e suponha, seja dada uma isometria $f : \Pi \longrightarrow \Pi'$
- Tome três pontos colineares A , B e C em Π e indique com A' , B' e C' as suas imagens, isto é, $A' = f(A)$, $B' = f(B)$ e $C' = f(C)$.
- É possível que os pontos A' , B' e C' sejam colineares? Compare as distâncias entre os pontos correspondentes.
- Conclua que f transforma pontos colineares em pontos colineares.
- Agora tome um ponto P' em Π' . Queremos afirmar que existe algum ponto P em Π tal que $f(P) = P'$.

· Faça a seguinte construção: tome três pontos não colineares M , N e O em Π e suas respectivas imagens M' , N' e O' em Π' (observe que, pelo mesmo argumento acima, esses pontos também não são colineares).

· Construa as circunferências de centros M , N e O e raios $\overline{M'P'}$, $\overline{N'P'}$ e $\overline{O'P'}$, respectivamente.

· Conclua que existe um ponto P em Π tal que $f(P) = P'$.

· Junte a última conclusão com aquela do quarto item para, finalmente, concluir que uma isometria transforma rectas em rectas.

· Anotações:

No estudo das simetrias, as transformações que nos interessam são aquelas onde $\Pi = \Pi'$. Assim, a partir de agora, consideramos somente transformações $f : \Pi \longrightarrow \Pi$.

ACTIVIDADE 5*:

Um exemplo de transformação de um plano nele mesmo

Passos:

· Considere o plano Π determinado pela folha de papel. Desenhe um sistema de eixos coordenados Ox e Oy , de forma que cada ponto X de Π associamos um par ordenado (a,b) e escrevamos $X = (a, b)$.

· Considere a função $f : \Pi \longrightarrow \Pi$, $f(X) = f(a, b) = (a + 2, b + 7)$.

· Tome dois pontos quaisquer P , Q em Π e compare as distâncias entre P e Q à distância entre $P' = f(P)$ e $Q' = f(Q)$.

· É possível concluir com essa informação que f é uma isometria?

· É possível encontrar dois pontos P , Q em Π , tais que a distância entre P e Q é diferente da distância entre $P' = f(P)$ e $Q' = f(Q)$?

· Conclua que f é uma isometria.

· Anotações:

ACTIVIDADE 6*:

Uma isometria mais simples - a função identidade

Passos:

- Considere a função $f : \Pi \longrightarrow \Pi$, $f(X) = f(X)$.
- Verifique que f é uma isometria.
- Anotações:

ACTIVIDADE 7*:

Duas propriedades importantes das isometrias

Usamos as ideias da actividade 4, para obter estas duas propriedades:

- a) Se uma isometria $f : \Pi \longrightarrow \Pi$ deixa fixos dois pontos A e B, então f deixa fixos todos os pontos da recta que passa por A e B.
- b) Se uma isometria $f : \Pi \longrightarrow \Pi$ deixa fixos três pontos A, B e C não colineares, então f deixa fixos todos os pontos do plano Π , isto é, f é a transformação identidade.

Passos:

- Tome dois pontos A e B do plano Π e indique com r a recta que passa por esses pontos. Usando a actividade 4, qual a imagem da recta r ?
- Tome um ponto X qualquer da recta r . Observando que o ponto A é deixado fixo pela isometria f , quais as possíveis imagens do ponto X?
- Repita o procedimento tomando por base o ponto B e conclua que o ponto X também é deixado fixo por f .
- Conclua a propriedade a).
- Tome três pontos não colineares A, B e C do plano Π .
- Tome um ponto qualquer X do plano Π , (diferente dos pontos A, B, C) e considere as circunferências centradas em A, B e C que passam por X.
- Fazendo uso da segunda parte da actividade 4, analise as possíveis imagens do ponto X.
- Conclua que f deixa o ponto X fixo.
- Conclua a propriedade b).
- Anotações:

Para explorarmos o conceito de isometrias do plano, nada melhor do que um ambiente de geometria dinâmica. Existem vários ambientes, para citar alguns: Cabri-Géomètre, Geometer's Sketchpad, Geogebra, iGeom e o Cinderella.

ACTIVIDADE 8:

Com o apoio de um programa de Geometria Dinâmica, recordar as isometrias: translações, rotações e reflexão deslizante.

ACTIVIDADE 9*: (adaptada)

Caracterizando as isometrias no Cinderella

Nesta actividade veremos que toda a isometria é resultado da composição de um certo número de reflexões.

Passos:

- Construa um triângulo ABC qualquer, utilizando a ferramenta "polígono".
- Considere uma isometria qualquer $f : \Pi \longrightarrow \Pi$ (pense no plano Π como sendo o plano do ecrã do computador). Já sabemos que a imagem do triângulo ABC pela isometria será um triângulo DEF congruente a ABC (porquê?).
- Construa um triângulo DEF congruente a ABC, utilizando oportunamente a ferramenta "circunferência dados centro e raio". Faça a construção de modo a deixar os triângulos separados.
- Modifique a cor do triângulo DEF para melhor acompanhar o processo.
- Trace a mediatriz do segmento de recta $[AD]$ e faça a reflexão do triângulo ABC em relação a essa recta, obtendo o triângulo $A'B'C'$. Note que $A' = D$, por construção.
- Verifique se os pontos B' e E coincidem. Em caso afirmativo, passe à etapa seguinte. Senão, trace a mediatriz do segmento de recta $[B'E]$ e faça a reflexão do triângulo $A'B'C'$ em relação a essa recta, obtendo o triângulo $A''B''C''$. Note que $A'' = A' = D$ e que $B'' = E$, por construção.
- Verifique que os pontos C'' e F coincidem (se saltou a etapa anterior, leia A'', B'', C'' como sendo $A'B'C'$). Em caso afirmativo, salte esta etapa. Senão, trace a mediatriz do segmento de recta $[C''F]$ e faça a reflexão do triângulo $A''B''C''$ em relação a essa recta, obtendo o triângulo $A'''B'''C'''$. Note que $A''' = D$, $B''' = E$, e $C''' = F$, por construção.
- Observe que, após essas reflexões (quantas foram?) o triângulo ABC foi levado a coincidir com o triângulo DEF.
- Lembre a segunda propriedade [a)] vista na actividade 7*.
- Conclua que composição dessas reflexões produz a isometria f .
- Movimente o triângulo ABC e veja que o resultado não se altera.

- O que aconteceria se, no início do processo, os vértices A e D coincidissem? E se dois pares de Vértices coincidissem? Ou três pares de vértices coincidissem?

- Conclua que toda a isometria é composta de, no máximo, três reflexões.

- Anotações:

4. Classificando e Identificando as Simetrias do Plano

Antes de iniciarmos a realização destas tarefas recordemos, ao de leve, alguns conceitos dados na primeira parte do trabalho, no Capítulo 1.

Denominamos por *figura geométrica plana* (ou simplesmente, *figura*) um subconjunto F do plano. As isometrias $f : \Pi \rightarrow \Pi$ do plano que têm a propriedade $f(F) = F$ são denominadas **simetrias** da figura F . Em outras palavras, as simetrias de F são as isometrias do plano que deixam invariante a figura F .

O conjunto formado por todas as simetrias de F é denominado grupo das simetrias de F e aqui denotado por $Sim(F)$.

Como tivemos oportunidade de ver no primeiro capítulo, é preciso fazer uma restrição importante ao tipo de estudo que estamos a fazer, isto é, para efeitos de classificação dos grupos de simetrias do plano consideramos, somente, os grupos discretos. Em termos práticos essa restrição pode ser entendida da seguinte forma:

- Se uma figura é invariante por translação numa dada direcção, então, de entre essas translações existe uma de comprimento mínimo.

- Se uma figura é invariante por rotações em torno de um centro, então de entre essas rotações, existe uma de ângulo mínimo.

ACTIVIDADE 1*:

Agrupando as figuras em classes.

Vimos no Capítulo 1, que a classificação das figuras simétricas faz-se a partir dos seus grupos de simetrias. Nesta actividade propomos, como primeiro passe para a classificação das simetrias, o agrupamento das gravuras em três classes, função da invariância por translação.

Passos:

- No computador, abra a pasta "Actividade 1"³.

- Observe que todas as figuras da pasta são simétricas.

³Esta actividade pressupõe que se coloque antes, em cada computador, uma pasta, denominada "Actividade 1" com pelo menos 3 gravuras para cada tipo: rosáceas (grupos finitos), grupos de frisos e grupos de padrões.

- Separe aquelas que são invariantes por translação daquelas que não são. Estas últimas são chamadas de rosáceas.
- Das primeiras, observe que algumas só são preservadas por translações em uma única direcção. São chamadas de frisos. Separe-as numa outra classe.
- Observe que as figuras que restam são preservadas por translações em várias direcções. São chamadas de grupos de padrões.
- Anotações:

ACTIVIDADE 2*:

As possíveis simetrias de um friso.

Os frisos são figuras invariantes por translação numa única direcção.

Assim, de entre as simetrias de um friso, necessariamente encontraremos translações. Mas podemos encontrar também, reflexões, rotações e reflexões com deslizamento. Esta actividade tem como objectivo compreender as possíveis simetrias de um friso.

Primeira parte

Passos:

- Suponha dada uma figura do tipo friso e considere seu grupo de simetrias.
- Considere v o vector da translação de amplitude mínima (isto é, não há nenhuma translação do grupo com vector de comprimento menor que v).
- Considere uma translação qualquer do grupo, com vector de translação w .
- Utilizando o algoritmo da divisão de Euclides, escreva w em função de v e de um resto u .
- Verifique que a translação de vector u pertence ao grupo.
- Observando que u é menor do que v , conclua que $u = 0$.
- Conclua que w é um múltiplo inteiro de v .
- Anotações:

Segunda parte

Passos:

- Que tipo de reflexões mantêm o friso invariante? Qual é a posição dos possíveis eixos de reflexão para que tenhamos uma simetria de um friso.
- Se o friso possuir rotações, quais os possíveis ângulos dessas rotações?
- Nesse caso, onde se podem localizar os centros das rotações?

· E quanto às reflexões com deslizamento, quais os possíveis vectores que as caracterizam?

· Anotações:

Conclusão:

As possíveis simetrias de um friso são:

- A) Translações segundo um vector v e seus múltiplos;
- B) Reflexão horizontal, isto é, a recta de reflexão é paralela ao vector v e passa pelo "meio" do friso;
- C) Reflexões verticais, isto é, a recta de reflexão é perpendicular à direcção do vector v ;
- D) Meias voltas, isto é, rotações de amplitude π ;
- E) Reflexões deslizantes não triviais, isto é, cujas reflexões e translações que a compõem não são simetrias do grupo;
 - 1) Se o grupo possui eixos de reflexão verticais, a distância entre dois eixos de reflexão consecutivos é igual ao comprimento de v ou à sua metade;
 - 2) Se o grupo possui meias voltas (rotações de amplitude π), a distância entre dois centros de rotação consecutivos é igual ao comprimento de v ou à sua metade;
 - 3) Se o grupo possui reflexões com deslizamento não triviais, o comprimento do vector das reflexões deslizantes mínimas é igual ao comprimento de v ou à sua metade.

ACTIVIDADE 3:

- (1) A partir de um elemento simples, que é repetido por recorte, sobre papel quadriculado, criar frisos utilizando:
 - (a) Movimentos de deslizar;
 - (b) Movimentos de virar;
 - (c) Movimentos de rodar.
- (2) A partir de um elemento simples criar rosáceas usando:
 - (a) Movimentos de rodar;
 - (b) Movimentos de virar.

ACTIVIDADE 4:

- (1) Em azulejos encontrar eixos de reflexão com a ajuda de um espelho;

- (2) Em rosáceas encontrar eixos de reflexão com a ajuda de um livro de espelhos;
- (3) Em frisos encontrar eixos de reflexão com a ajuda de um ou dois espelhos.

ACTIVIDADE 5:

A figura (3.4) representa parte de um friso inspirado num existente na Casa dos Repuxos em Conímbriga. Copie o friso em papel vegetal e desloque essa cópia na direcção e sentido indicado pela seta. O que acontece? (definição de friso)

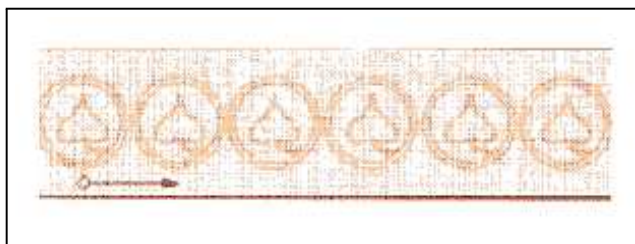


FIGURA 3.4. Friso inspirado num existente na Casa dos Repuxos em Conímbriga.

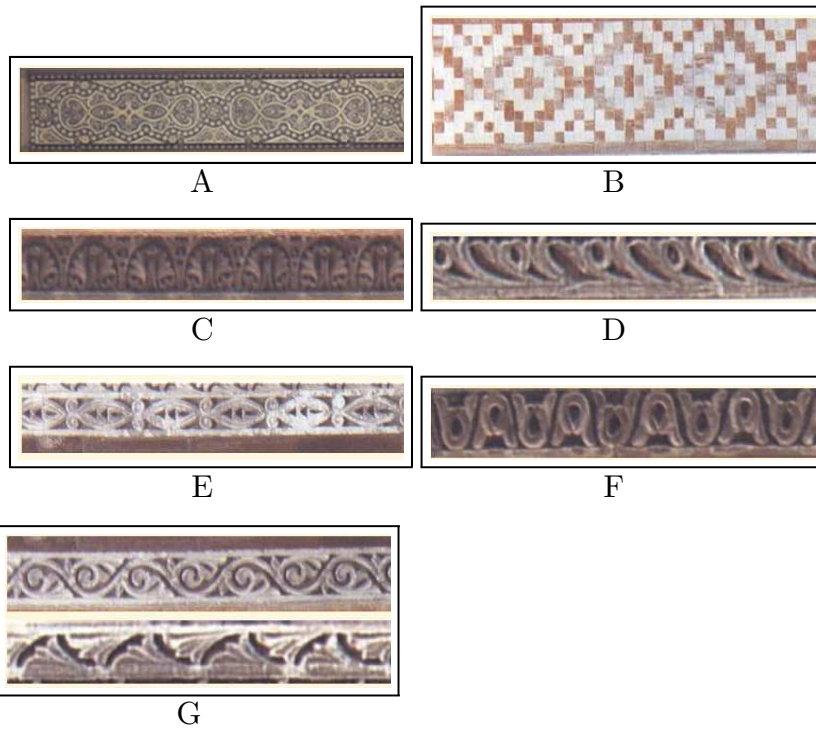
ACTIVIDADE 6:

Observe agora os frisos⁴ que a seguir se apresentam e identifique, em cada um deles, isometrias que os deixem invariantes. Com o auxílio do algoritmo de Washburn e Crowe para frisos⁵, classifique-os. (referir que existem apenas 7 tipos diferentes de frisos). Estes frisos são da Mesquita de Córdoba, em Espanha, refernciada no Capítulo 1.

⁴Estes frisos são elementos decorativos da Mesquita de Córdoba, em Espanha. Disponíveis no sítio

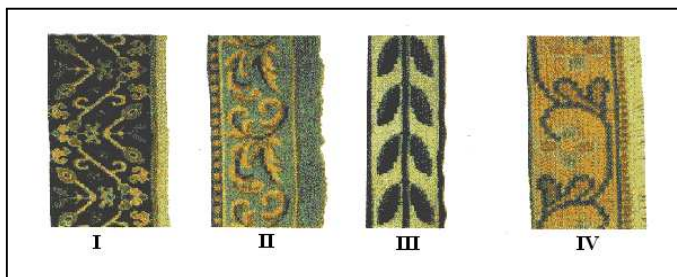
http://descartes.enice.mecd.es/taller_de_matematicas/celosias/celosias_11.htm

⁵Este algoritmo encontra-se nos Anexos, Secção –Algoritmos.



ACTIVIDADE 7:

Com o auxílio do fluxograma de Washburn e Crowe identifique os tipos de friso que se observam nas barras de tapetes que a seguir se apresentam:



ACTIVIDADE 8:

Propor aos alunos a escolha de um motivo não simétrico com que, posteriormente, com a ajuda com o Geoplano ou, de um programa de geometria dinâmica, por exemplo o Cinderella ou o Geogebra, deverão gerar diferentes tipos de frisos.

Em níveis escolares mais avançados o professor pode solicitar a construção de grupos de padrões.

ACTIVIDADE 9:

Propor a construção de um friso como elemento decorativo para um local específico da escola. Esta actividade pode ser desenvolvida em parceria com as disciplinas de Educação Visual ou de EVT. Pode também, ser organizado um concurso onde os três primeiros classificados terão direito a reproduzir os respectivos frisos em pintura parietal. A proposta deverá ser acompanhada de relatório onde é apresentado o motivo, uma proposta de friso e deverão ser relatados os aspectos matemáticos envolvidos. Solicita-se também um pedido de autorização, para a referida pintura, dirigido ao Director Executivo da escola.

· Anotações:

No Capítulo 2, procedeu-se à identificação de padrões existentes em azulejos e em calçadas portuguesas. Essa classificação passa, como vimos, por identificar o paralelogramo fundamental, os centros de rotação para determinar qual o de maior ordem e conseqüentemente a qual dos cinco subgrupos que só contém isometrias directas pertence. Identificamos posteriormente os eixos de reflexão e com a ajuda do algoritmo de Washburn e Crowe, para a classificação de padrões procedemos à sua identificação. As duas próximas actividades tem como objectivo “treinar” os alunos para a identificação/classificação de padrões, visam encontrar um paralelogramo fundamental e os centros de rotação. Os eixos de reflexão e de reflexão deslizante podem ser propostos em qualquer das duas actividades ou noutras.

ACTIVIDADE 10:

No Capítulo 1, vimos que o paralelogramo fundamental não é único. Nesta actividade propomos que os alunos identifiquem três paralelogramos na figura seguinte, que foi construída com o programa Kali, disponível on-line no sítio:

<http://www.scienceu.com/geometry/handson/kali/index.cgi?group=wt>

Observação 3.2. É de referir/lembrar que o paralelogramo fundamental tem de ser tal que verifique, cumulativamente, os dois itens seguintes:

- (A) Tem de ser capaz de gerar o plano todo (ou a figura completa) por translações associadas ao grupos das translações;
 (B) Os seus lados têm de ser de tamanho mínimo.

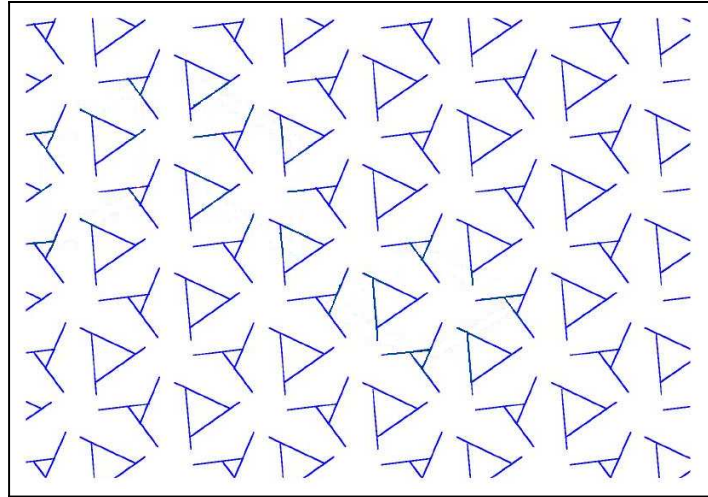


FIGURA 3.5. Desenhar três paralelogramos fundamentais. Construção obtida com o programa Kali.

Note-se que paralelogramos como os representados na figura (3.6), não são paralelogramos fundamentais.

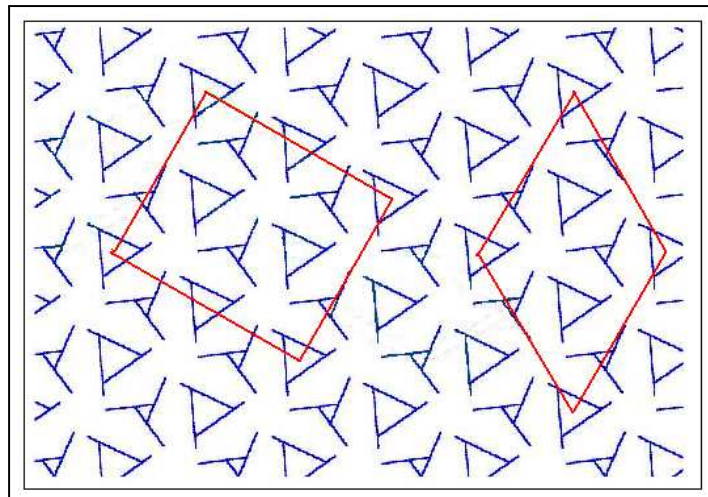


FIGURA 3.6. Como se pode ver estes paralelogramos geram o plano todo, no entanto não têm tamanhos mínimos, e consequentemente, não são fundamentais.

ACTIVIDADE 11:

Observe o grupo de padrões da figura (3.7) e identifique os centros de ordem dois, de ordem três e de ordem seis. É claro que esta actividade pressupõe que o professor tenha previamente explicado o conceito de ordem de uma rotação.

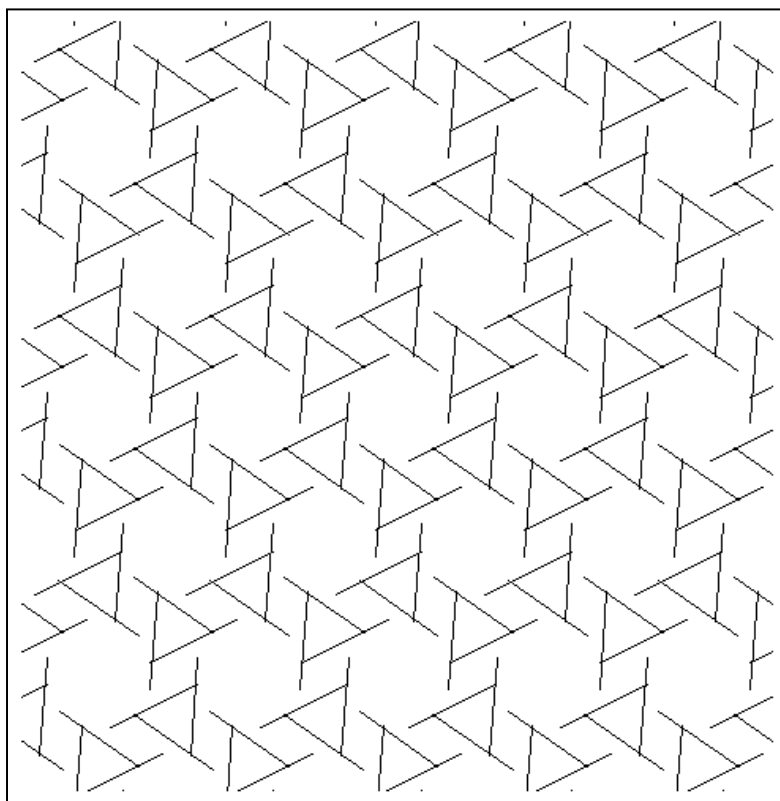


FIGURA 3.7. Padrão construído com o programa Kali.

No seguimento desta actividade e como consolidação, o professor pode desenvolver outras actividades, como por exemplo, propor aos alunos que em duplas usem os programas *Tess*, disponível para download no sítio

<http://www.peda.com/tess/>

e *Kali*, para construir padrões e identificar os respectivos centros de rotação e respectivas ordens. Estes dois programas têm a particular vantagem de possuírem um menu onde o utilizador define à partida o tipo de padrão que vai desenhar, o que contribui para solidificar todo este processo de identificação e classificação dos grupos de isometrias.

ACTIVIDADE 12:

Propor aos alunos a identificação de padrões de azulejos existentes em igrejas da localidade. Por exemplo, identificar os Padrões das igrejas regionais que se encontram no Anexo 8.

ACTIVIDADE 13:

Para finalizar este grupo de actividades, propomos uma visita de estudo à Casa – Museu Frederico de Freitas e/ou à Quinta Monte Palace onde se encontram expostos muitos grupos de padrões em azulejos, que os alunos devem fotografar, após o devido pedido de autorização, para posteriormente procederem à sua identificação/classificação, já em ambiente de sala de aula.

Em género de conclusão e consolidação das competências adquiridas ao longo da secção, propomos como,

ACTIVIDADE 14:

Completar a tabela seguinte:

Grupo N°	Notação Internacional	Rede	Amplitude dos ângulos	Eixos de reflexão	Tipo de Simetrias
1	<i>p1</i>	Paralela	Não tem	Não tem	Translações
2	<i>p2</i>				
3	<i>pm</i>				
4	<i>pg</i>				
5	<i>cm</i>				
6	<i>pmm</i>				
7	<i>pmg</i>				
8	<i>pgg</i>				
9	<i>cmm</i>				
10	<i>p4</i>	Quadrada	90° e 180°	Não tem	Ângulos de ordem 2 e 4 e Translações
11	<i>p4m</i>				
12	<i>p4g</i>				
13	<i>p3</i>				
14	<i>p31m</i>	Hexagonal			
15	<i>p3m1</i>				
16	<i>p6</i>				
17	<i>p6m</i>				

Tal como anunciado, no final do Capítulo 1, apresentamos as soluções da actividade então proposta, referindo, que é uma boa actividade para propor aos alunos.

Identificação dos padrões propostos no final do capítulo 1:

fig1 – *pmg*; *fig2* – *p3m1*; *fig3* – *p2*; *fig4* – *pmm*; *fig5* – *cm*; *fig6* – *p31m*;
fig7 – *m1*; *fig8* – 11.

5. Pavimentações

ACTIVIDADE 1:

Como primeira actividade propomos a criação de uma “bolsa” de polígonos regulares: triângulos quadrados, pentágonos e hexágonos, (...), com a particularidade que todos devem ter a mesma medida de aresta. Estes devem ser construídos nas disciplinas atrás enunciadas e de acordo com os objectivos e competências previstas nos respectivos programas. Após a sua construção devem ser reproduzidos em cartolina colorida ou em papel de lustre, por exemplo, em número não inferior a dez de cada tipo.

ACTIVIDADE 2:

Existem pavimentações na tua terra? Observa os padrões de ladrilhos e azulejos no chão e nas paredes da tua casa, em paredes de edifícios, nos passeios das ruas,...

Escolhe uma dessas pavimentações, desenha o ladrilho base e descreve o local em que a encontraste.

ACTIVIDADE 3:

Pesquisa pavimentações de outras culturas: africana, árabe, chinesa, (entre outras);

ACTIVIDADE 4:

Pavimentações de Escher.

Pelo contributo que tem o trabalho de Escher na consolidação do conceito de pavimentação e simetria, não poderíamos deixar de propor como actividade, uma pesquisa sobre o mesmo. E como estímulo ou motivação, para esta actividade, propomos a análise das figuras (3.8) e (3.9) onde se apresenta, respectivamente, a criação de uma região fundamental e consequente pavimentação do plano por rotação (pavimentação de Escher).

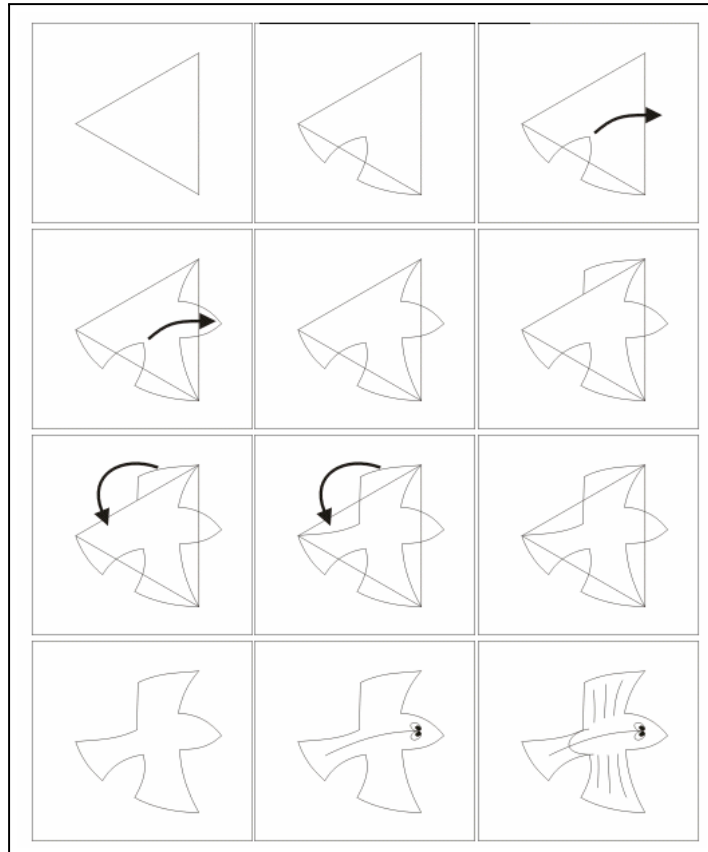


FIGURA 3.8. Construção de uma região fundamental.

ACTIVIDADE 5:

Investiga se é possível pavimentar o plano partindo de um triângulo qualquer. E de um quadrilátero qualquer?

ACTIVIDADE 6:

- (1) Investiga se é possível formar um vértice com:

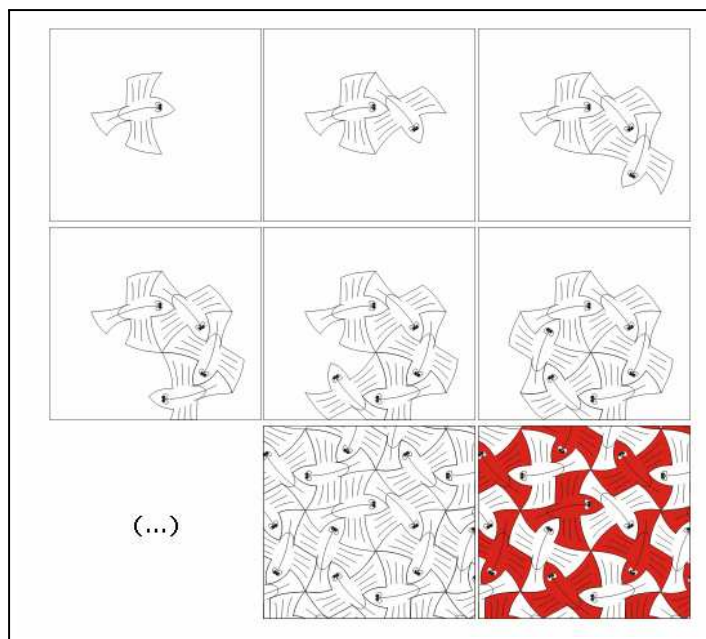


FIGURA 3.9. Pavimentação com rotação. Pavimentação de Escher.

- (a) Triângulos e quadrados;
 - (b) Triângulos quadrados e hexágonos;
 - (c) Quadrados e octógonos.
- (2) Combinando os polígonos regulares ao teu dispor, tenta descobrir todos os outros tipos de vértices.
 - (3) Escolhe um vértice de entre os que descobriste na alínea anterior, obtém um ladrilho base e recria a pavimentação. Explica sucintamente cada passo da tua construção indicando as transformações geométricas que usaste.

Os alunos devem utilizar a bolsa de polígonos criada na Actividade 1 desta secção, ou em alternativa, fotocopiar e recortar os polígonos que se encontram no apêndice, Anexo 6.

· Anotações:

ACTIVIDADE 7:

Pavimentar o plano:

- (1) Usando todos os polígonos regulares disponíveis;

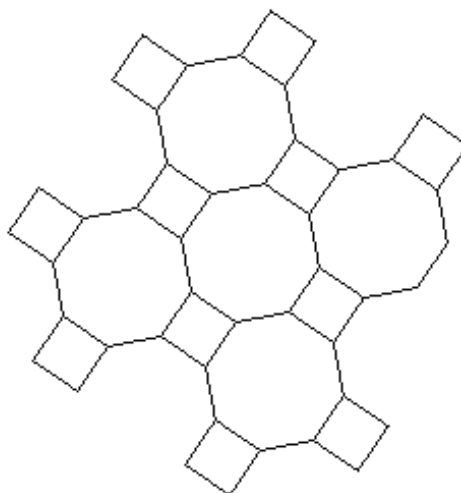


FIGURA 3.10. Pavimentação do plano com quadrados e octógonos regulares com a mesma medida de aresta.

- (2) Usando polígonos regulares geometricamente iguais e satisfazendo as condições:
- (a) Arestas coincidentes;
 - (b) Vértices (ponto de encontro de três ou mais polígonos) do mesmo tipo.

Veja-se por exemplo a figura (3.10) .

Quando tiveres a certeza que as obtiveste todas, explica porque é que não poderão existir outras.

Atividade para usar a "bolsa" de polígonos.

· Anotações:

ACTIVIDADE 8:

- (1) Combinações de figuras que pavimentam:

Descobrir uma combinação de figuras que colocadas à volta de um ponto, não se sobrepõem nem produzem falhas. (pav. Regulares, semiregulares..).

- (2) Projecto para redesenhar o chão de uma sala da escola. (Achas os quadrados do chão monótonos e queres fazer uma modificação.....escolhe formas, cores.....) (Depois dos alunos terem pavimentado uma amostra, devem escrever uma explicação completa da forma como a pessoa que os aplicar deve colocar as peças.

CAPÍTULO 4

ANEXOS

1. ANEXO – Pavimentações

Apresentamos esta subsecção dedicada às pavimentações, por considerarmos que, pese embora, o conceito de padrão se possa obter a partir do conceito de pavimentação e vice-versa, não os devemos confundir. Enquanto nos padrões podemos considerar um motivo e as suas cópias a uma ou mais cores, sob um fundo uniforme, nas pavimentações a intenção é cobrir o plano completamente, sem falhas nem sobreposições.

Ao falar em **pavimentações do plano**, não poderemos deixar de fazer referência a Kepler (1580-1630). Tudo leva a crer que foi o astrónomo **Joannes Kepler** o primeiro a estudar as pavimentações (tesselações) do plano utilizando polígonos regulares. Este estudo foi publicado no seu livro "**Harmonices Mundi**" (Harmonia do Mundo), publicado em 1619. Nele, Kepler enunciou, a terceira lei do movimento planetário. Nele, Kepler engloba, interligando, três temáticas: geometria, música e astronomia. Este livro é o culminar de todos os seus estudos nas áreas da astronomia, matemática, filosofia, física e teologia. ([21])

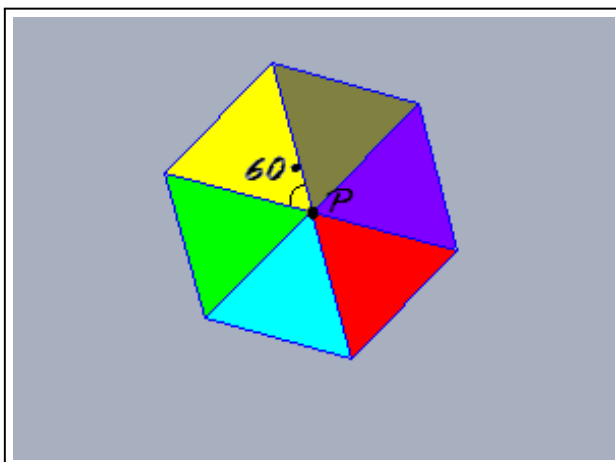
Kepler observou que polígonos regulares idênticos pavimentam perfeitamente o plano, apenas, se a amplitude de cada um de seus ângulos internos for um divisor de 360° .

É bem sabido que a amplitude de um ângulo interno de um polígono regular, de n lados, pode ser dado por: $180^\circ - \frac{360^\circ}{n}$.

Só existem três polígonos regulares idênticos que podem pavimentar perfeitamente o plano, são eles:

· **O Triângulo equilátero, $n = 3$**

$$\hat{a} = 180^\circ - \frac{360^\circ}{3} = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$$
$$6 \times 60^\circ = 360^\circ$$

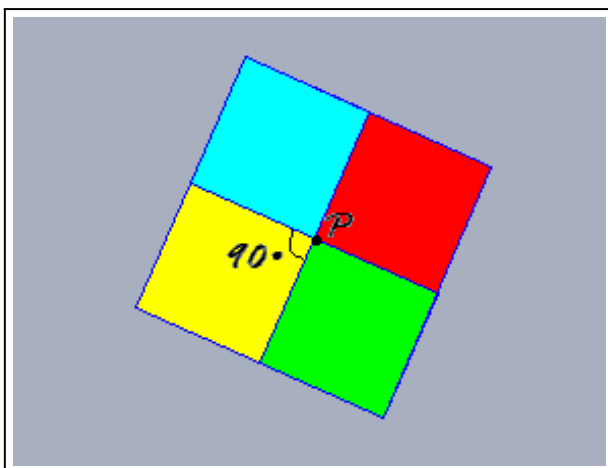


Pavimentação do plano com triângulos equiláteros.

· O Quadrado, $n = 4$

$$\hat{a} = 180^\circ - \frac{360^\circ}{4} = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$$

$$4 \times 90^\circ = 360^\circ$$

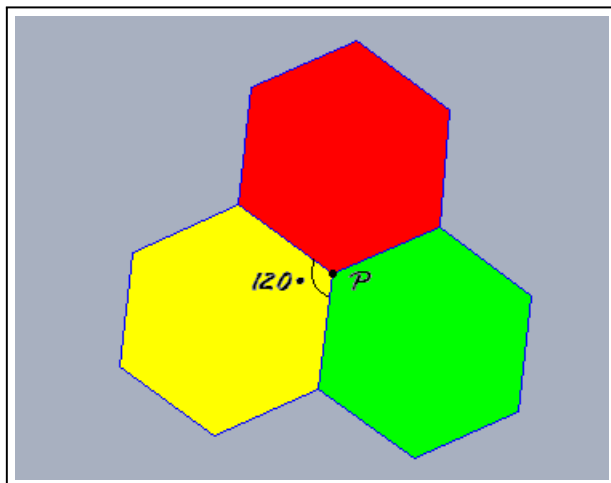


Pavimentação do plano com quadrados.

· O Hexágono, $n = 6$

$$\hat{a} = 180^\circ - \frac{360^\circ}{6} = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$$

$$3 \times 120^\circ = 360^\circ$$



Pavimentação do plano com hexágonos.

Estes são os únicos polígonos regulares que pavimentam o plano.

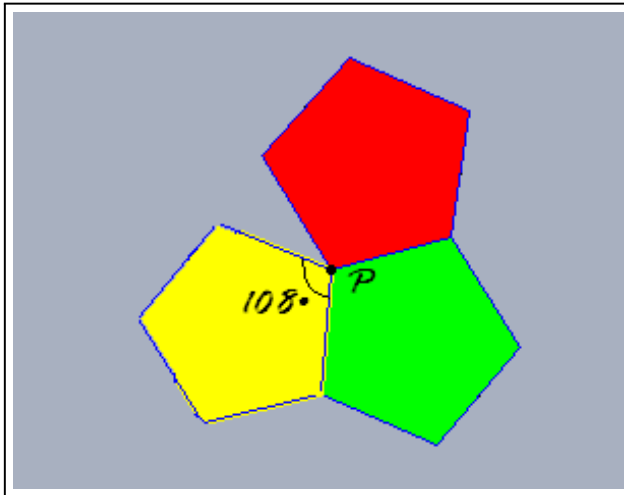
Não é difícil verificar que nenhum outro polígono regular pavimentam o plano. Vejamos, por exemplo, o caso do

· **Pentágono**, $n = 5$

$$\hat{a} = 180^\circ - \frac{360^\circ}{5} = 180^\circ - 72^\circ = 108^\circ$$

$$3 \times 108^\circ = 324^\circ \text{ (há uma brecha);}$$

$$4 \times 108^\circ = 432^\circ \text{ (há sobre posição).}$$



Tentativa de pavimentação do plano com pentágonos.

Portanto, estas são as únicas três formas de pavimentar o plano, utilizando um só polígono regular ou um só ladrilho, porém, é certo e sabido que é possível pavimentar o plano com vários polígonos regulares, basta olharmos para o chão das nossas casas, das nossas escolas, dos edifícios ou dos passeios, entre outros. Portanto, podemos dizer que **existem vários tipos de pavimentações**.

As pavimentações que vamos estudar podem ser constituídas por apenas um polígono regular (um só ladrilho) ou, por dois ou mais polígonos regulares. Em qualquer dos casos, vamos supor sempre que os polígonos são regulares e congruentes. Começemos pelas

· **Pavimentações Monoédricas ou Puras.** São pavimentações formadas apenas por um só polígono regular (ou um só ladrilho). Veja-se como exemplo a figura (4.1).

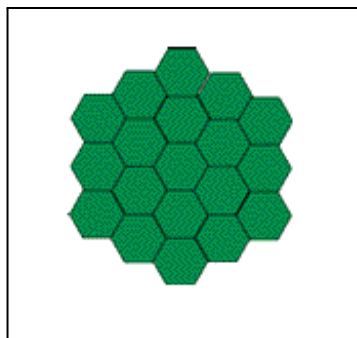


FIGURA 4.1. Pavimentação monoédrica.

O grupo de simetria desta pavimentação é $p6m$. Esta pavimentação tem um grupo de simetria com 12 elementos, isto é, de ordem 12 (ou 6 -centro, para usar a notação que vem no livro de Martin, George E.), é designado por *diedro* d_6 . A pavimentação é *periódica* pois admite translações de simetria em duas direcções diferentes.

Se unirmos os centros dos hexágonos obtemos uma pavimentação regular triangular e ao contrário também se verifica, ou seja, se unirmos os centros dos triângulos obtemos uma pavimentação regular hexagonal. Cada uma destas duas pavimentações diz-se **dual** da outra.

· **Pavimentações Arquimedianas ou Semiregulares**, são pavimentações formadas por dois ou mais polígonos regulares com a particularidade dos vértices da pavimentação serem todos do mesmo tipo (veja-se definição baixo).

As pavimentações são descritas em função do tipo de vértice. Donde se conclui que existem pavimentações semiregulares compostas pelo mesmo tipo de polígonos e não são idênticas, veja-se a este propósito as figuras abaixo (4.2) e (4.3).

Concentremo-nos, por exemplo, nas pavimentações formadas por dois tipos de polígonos. Será que estes tipos de pavimentação são todas iguais? O que distingue duas pavimentações deste tipo? Bem, em primeiro lugar o tipo de polígonos que a compõem. Uma pavimentação formada por triângulos e hexágonos será sempre diferente de uma constituída por triângulos e quadrados, por exemplo. Todavia, duas pavimentações podem ser formadas por polígonos iguais e serem diferentes, veja-se, novamente, as figuras (4.2) e (4.3). Olhando para os pontos correspondentes aos vértices que estão assinalados com as letras A e B correspondentes, respectivamente, às figuras, atrás mencionadas, verificamos que a disposição dos polígonos em torno dos vértices é diferente. Para compreendermos essa diferença necessitamos de dois conceitos: o conceito de **espécie de vértice** e o conceito de **tipo de vértice**. Assim, introduzimos a

Definição 4.1. *A espécie de um vértice diz respeito ao tipo de polígonos regulares que se encontram nesse vértice.*

e a

Definição 4.2. *Dois vértices da mesma espécie são do mesmo tipo se a ordem circular (por exemplo - sentido negativo) em que se dispõem os polígonos em torno do vértice é a mesma.*

Olhando para as figuras verificamos que ambas as pavimentações são formadas por triângulos e quadrados, mas são diferentes. É necessário ter em conta a *espécie* e o *tipo de vértice*. Por exemplo, olhando para os vértices A e

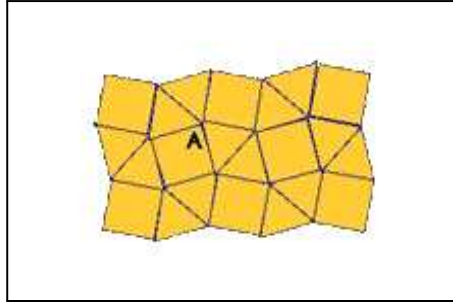


FIGURA 4.2. Pavimentações Semiregulares.

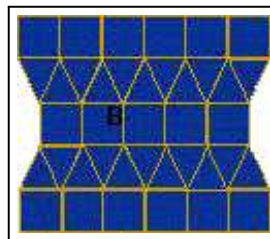


FIGURA 4.3. Pavimentações Semiregulares.

B, das figuras (4.2) e (4.3), verificamos que ambos são formados por triângulos e por quadrados, são portanto, da mesma *espécie*, porém o vértice A é do tipo: 3.3.4.3.4, ou seja, triângulo, triângulo, quadrado, triângulo e quadrado, enquanto que o vértice B é do tipo: 3.3.3.4.4. São portanto vértices de tipos diferentes. Para finalizar esta parte dedicada às pavimentações, definimos as

· **Pavimentações Demiregulares**, são as pavimentações constituídas por polígonos regulares cujos vértices são de tipos diferentes, veja-se a este propósito, também, a figura (4.4).

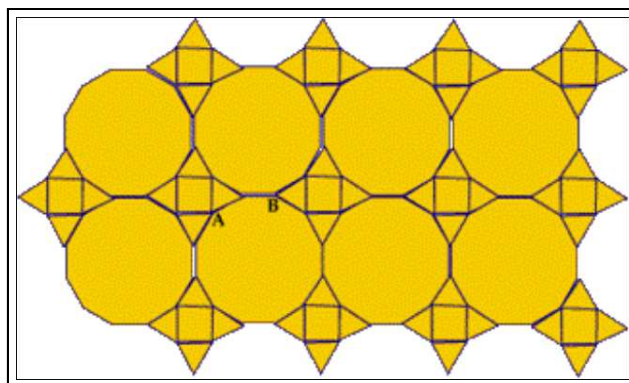
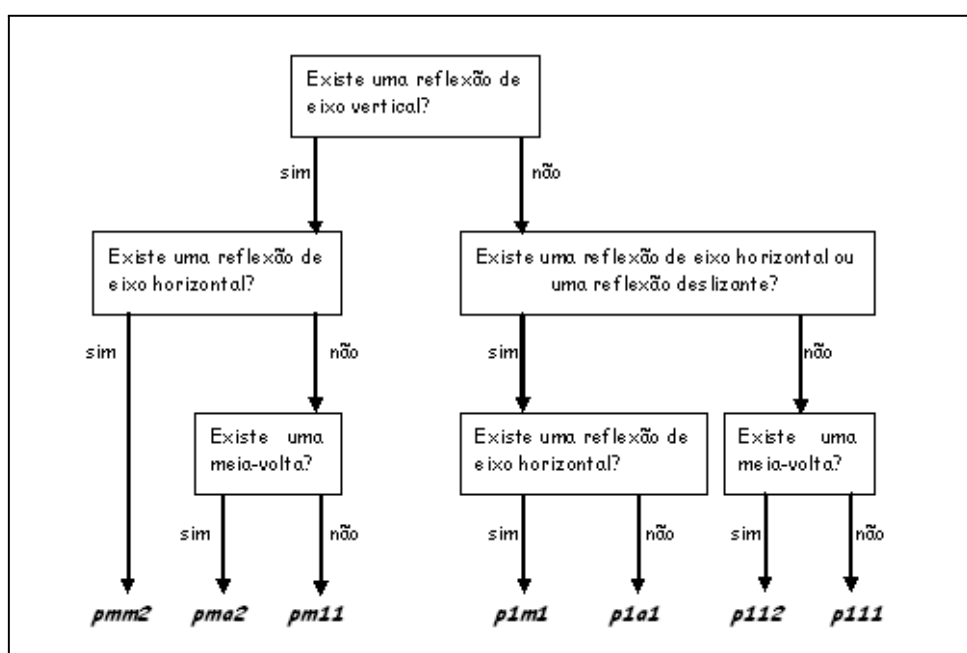


FIGURA 4.4. O vértice A é do tipo: 3.4.3.12 e o vértice B é do tipo: 3.12.12.

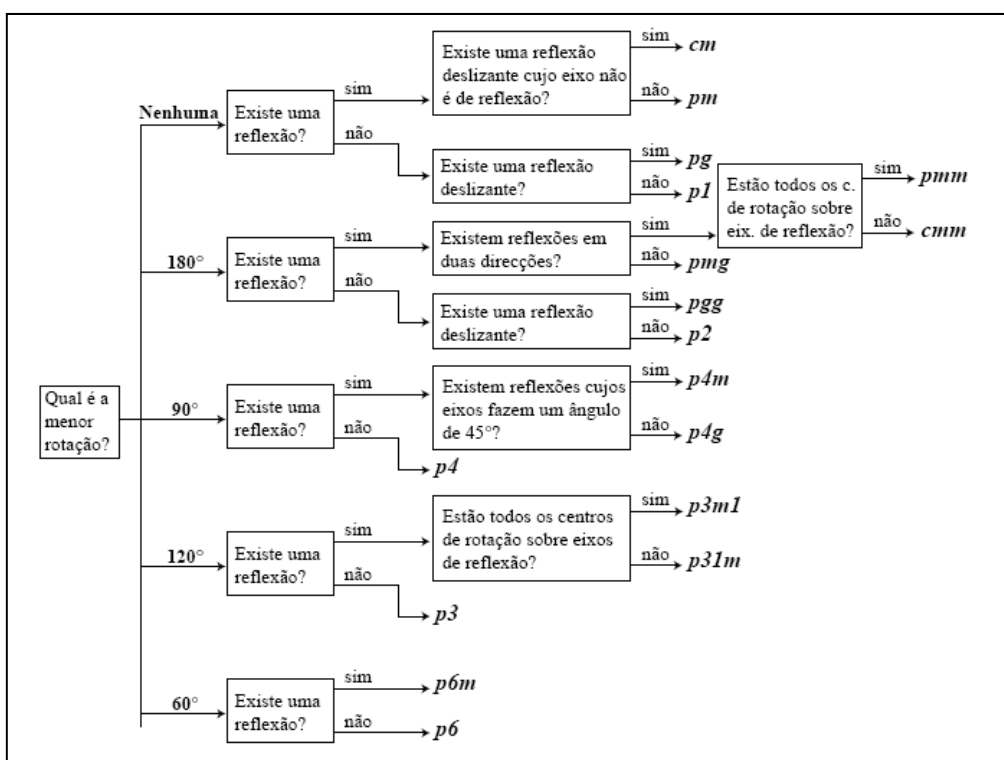
2. ANEXO – Algoritmo para Classificação de Frisos

Algoritmo de Washburn e Crowe.



3. ANEXO – Algoritmo para Classificação de Padrões

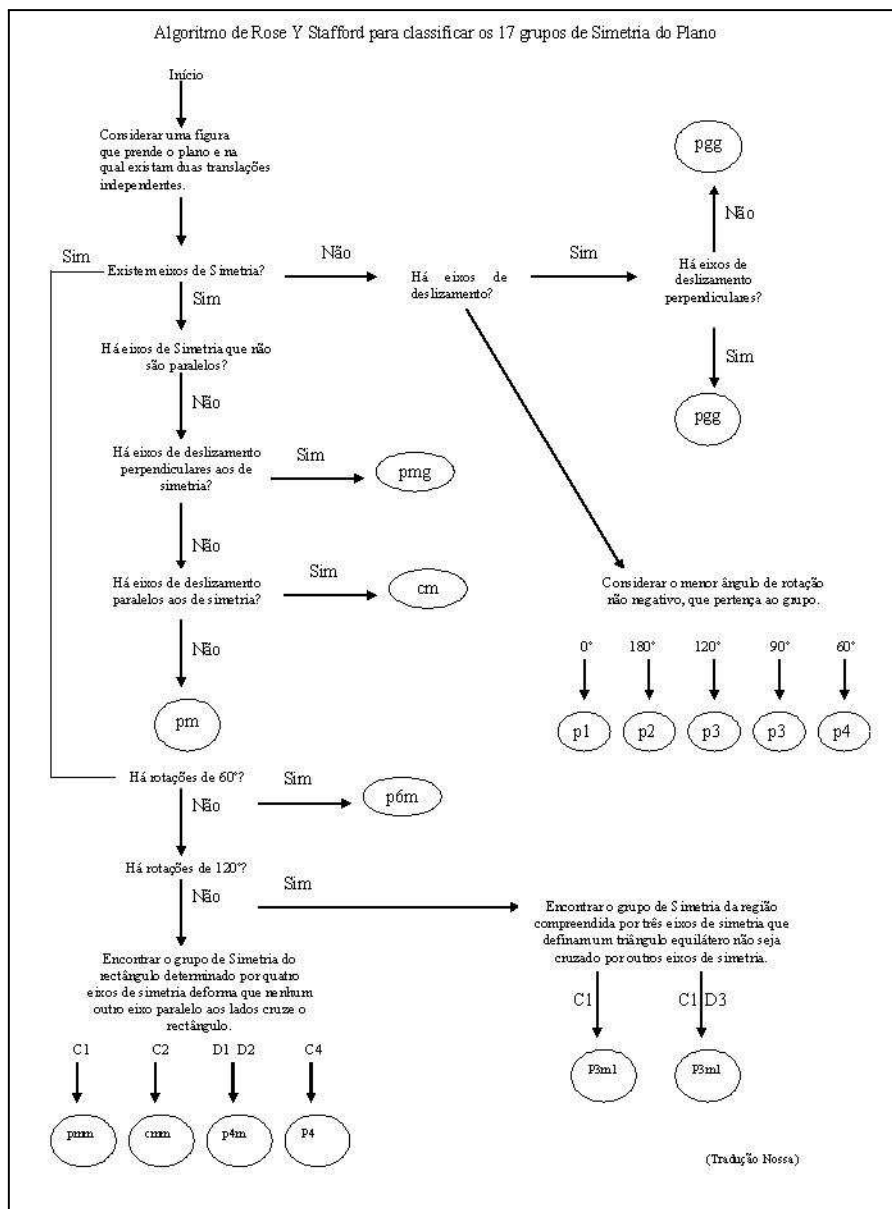
A - Algoritmo apresentado por Washburn e Crowe.



B - Algoritmo apresentado por George Martin.

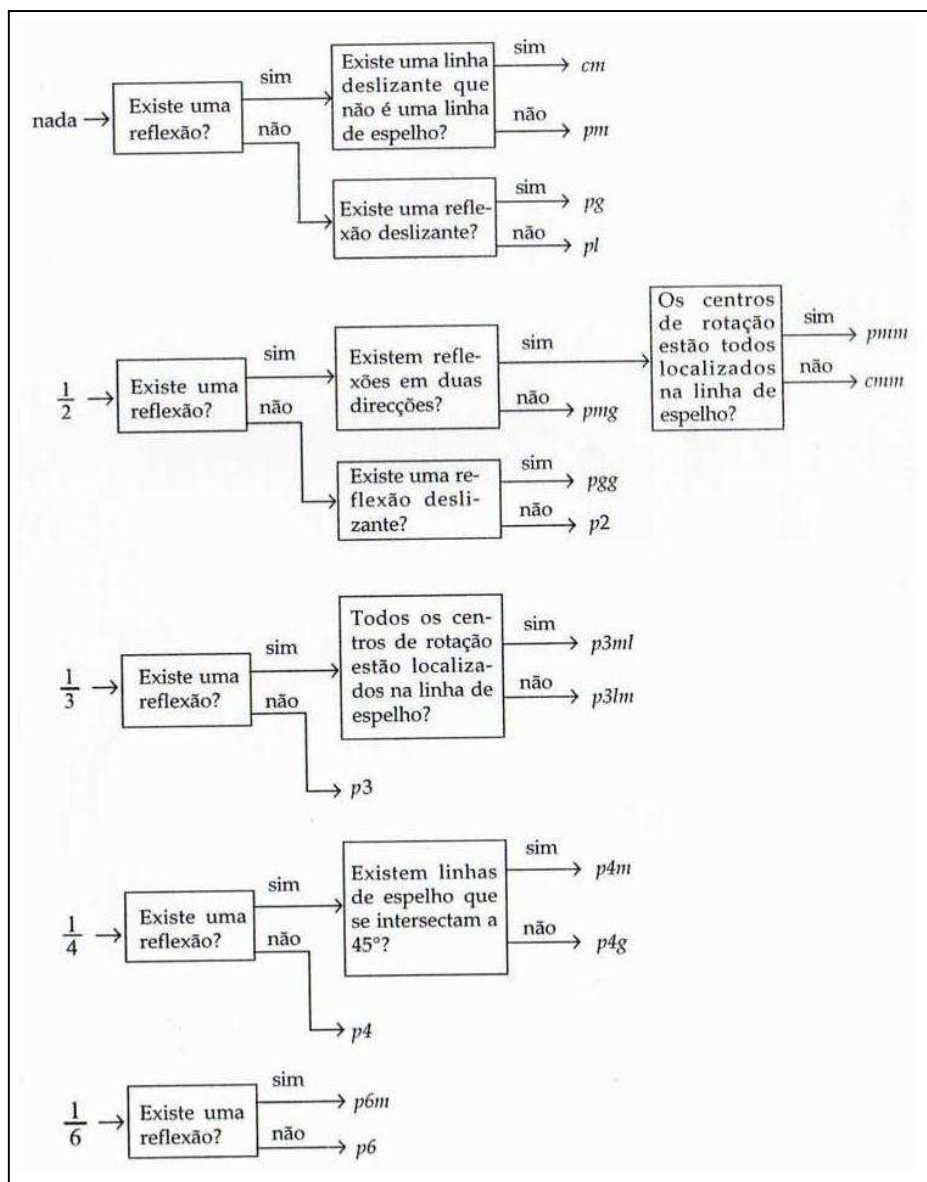
Sem n-centros	2-centros	4-centros	3-centros	6-centros
W_1 p1 S/Isometrias estranhas	W_2 p2 S/Isometrias estranhas	W_4 p4 S/ eixos de Simetria	W_3 p3 S/ eixos de Simetria	W_6 p6 S/ eixos de Simetria
W_1^1 cm Alguns eixos da reflexão deslizante não são eixos de simetria	W_2^1 cmm Alguns 2-centros não estão no eixo de simetria	W_4^1 p4m Os 4-centros estão no eixo de simetria	W_3^1 p3m1 Todos os 3-centros estão no eixo de simetria	W_6^1 p6m Tem eixo de simetria
W_1^1 pm Todos os eixos da reflexão deslizante são eixos de simetria	W_2^1 pmm Todos os 2-centros não estão no eixo de simetria	W_4^1 p4g A 4-centro está em todos os eixos de simetria	W_3^1 p31m A 4-centro está em todos os eixos de simetria	-
W_1^3 pg Não tem eixos de simetria mas tem reflexões deslizantes	W_2^1 pmg Todos os eixos de simetria são paralelos	-	-	-
-	W_2^4 pgg Não tem eixos de simetria mas tem reflexões deslizantes	-	-	-

C - Algoritmo apresentado por Rose Y. Stafford.








(Tradução nossa).

D - Algoritmo apresentado por David W. Farmer.



4. ANEXO – Símbolos de Centros de Rotação

Símbolos utilizados nos esquemas para denotar transformações de simetria dos padrões por rotação.

Símbolos	Descrição
	Centro de simetria de rotação de ordem 2 (ou meia volta)
	Centro de simetria de rotação de ordem 3
	Centro de simetria de rotação de ordem 4
	Centro de simetria de rotação de ordem 6
	Centro de simetria de rotação situados sobre os eixos de reflexão

5. ANEXO – Tábua de Equivalência de Notações para Grupos de Padrões

6. ANEXO – Bolsa de Polígonos

7. ANEXO – Bolsa de Padrões (desdobrável)

8. ANEXO – Padrões em Igrejas Regionais



A



A



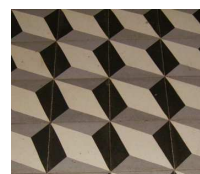
B



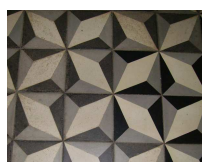
C



C



C



C



D



E



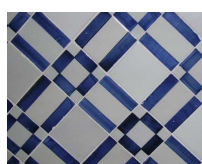
E



F



G



H



I



I

- A- Igreja do Bom Jesus, Ponta Delgada.
 B- Igreja do Porto da Cruz.
 C- Igreja de São Vicente.
 D- Igreja Arco de S. Jorge.
 E- Igreja S. Jorge.
 F- Igreja de Santana.
 G- Igreja do Faial.
 H- Igreja da Ribeira Brava.
 I- Igreja de C. de Lobos.

Bibliografia

- [1] CALADO, RAFAEL SALINAS (1999)– Azulejaria na Madeira e na Coleção da Casa~Museu Frederico de Freitas.
- [2] FREITAS, PAULO, CLODE, LUÍSA. Coleção Frederico Freitas. D.R.A.C.
- [3] FARMER, DAVID W. 1999. Grupos e Simetria– Um Guia Para Descobrir a Matemática. Gradiva.
- [4] GÓMEZ, RAFAEL PÉREZ - 17, 46, ..., 627,... sinfonías para una loseta: los mosaicos de Alhambra e Granada.
- [5] PEREZ, ILDA e REIS, PAULA . Classificação dos Grupos Discretos de ISO (\mathbb{R}^2) - Grupos finitos, grupos de frisos e grupos de azulejos. Boletim da SPM - n^o 46 Abril de 2002, 53-79.
- [6] MATOS, ERNESTO, 1999. Mesmo por Baixo dos Meus Pés– Uma Viagem pela Calçada Portuguesa.
- [7] MARTIN, GEORGE E. - Transformation Geometry, an Introduction to Symmetry, New York, (1982).
- [8] MECO, JOSÉ JOAQUIM SALVADOR S.– Azulejaria Portuguesa. Coleção Património Português. Bertrand Editora, Lda., 1985.
- [9] PONTE, JOÃO PEDRO DA; MATOS, JOSÉ MANUEL e ABRANTES, PAULO. Investigação em Educação Matemática–Aplicações Curriculares. Instituto de Inovação Educacional. 1998.
- [10] SIMÕES, SANTOS J.M. DOS SANTOS– Azulejaria Portuguesa nos Açores e na Madeira, 1969. Exemplar fotocopiado, em depósito, na Biblioteca Regional.
- [11] VELOSO, EDUARDO, 1998. Geometria. "Temas Actuais".
- [12] VELOSO, EDUARDO e VIANA, J.P, 1998. Desafios 6 – “Mosaicos, tapetes e Matemática” –Edições Afrontamento.

- [13] JOYCE, DAVID E. - Wallpaper Groups, Department of Mathematics and Computer Science, Clark University, (1997). Disponível em <http://www.clarku.edu/~djoyce/wallpaper/>
- [14] Descobrimos as Simetrias no Plano. Disponível em <http://www.mat.ufg.br/bienal/2006/mini/caputi.roberto.pdf>, em 09/02/2007.
- [15] http://www.iep.uminho.pt/aac/sm/a2002/M_C_Escher/index2.htm
- [16] Brian Sanderson's Pattern Recognition Algorithm. Disponível em
[http : //www.math.toronto.edu/~drorbn/Gallery/Symmetry/Tilings/Sanderson/index.html](http://www.math.toronto.edu/~drorbn/Gallery/Symmetry/Tilings/Sanderson/index.html)
- [17] Kali: Symmetric Sketching. Disponível em
[http : //www.scienceu.com/geometry/handson/kali/index.cgi?group = wt](http://www.scienceu.com/geometry/handson/kali/index.cgi?group=wt)
- [18] Um Matemático Passeia por Alhambra. Disponível em
[http : //www.divulgamat.net/weborriak/TestuakOnLine/HasierakoIkasgaiak/RafaelPerezFMA2004.pdf](http://www.divulgamat.net/weborriak/TestuakOnLine/HasierakoIkasgaiak/RafaelPerezFMA2004.pdf)
(em 10 de Abril de 2007).
- [19] imagens de frisos, da Mesquita de Córdoba. Disponível em
[http : //descartes.cnice.mecd.es/taller_de_matematicas/celosas/celosas_11.htm](http://descartes.cnice.mecd.es/taller_de_matematicas/celosas/celosas_11.htm)
(em 27 de Agosto de 2006).
- [20] Pavimentações. Disponível em
[http : //members.netmadeira.com/rafaelluis/documentos/trabfinalgeometria.pdf](http://members.netmadeira.com/rafaelluis/documentos/trabfinalgeometria.pdf)
(em 25 de Agosto de 2006).
- [21] Kepler. Disponível em
[http : //www.educ.fc.ul.pt/docentes/opombo/seminario/kepler/](http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/opombo/seminario/kepler/)
(em 12 de Outubro de 2006).
- [22] Decoração Azulejar. Disponível em
[http : //pt.wikipedia.org/wiki/Azulejo#Por_t.C3.A9cnica_de_decora.C3.A7.C3.A3o](http://pt.wikipedia.org/wiki/Azulejo#Por_t.C3.A9cnica_de_decora.C3.A7.C3.A3o)
(em 11 de Janeiro de 2007).
- [23] Escher. Disponível em
[http : //www.mathacademy.com/pr/minitext/escher/index.asp](http://www.mathacademy.com/pr/minitext/escher/index.asp)
- [24] Disponível em:
[http : //www.math.arq.uva.es/GYCGA/Apuntes/raiz/node1.html](http://www.math.arq.uva.es/GYCGA/Apuntes/raiz/node1.html)
- [25] Classificação dos azulejos segundo a técnica. Disponível em
[http : //www.eb23-paulo-gama.rcts.pt/disciplinas/educ-tecnologica/azulejo-portugal/az2.html](http://www.eb23-paulo-gama.rcts.pt/disciplinas/educ-tecnologica/azulejo-portugal/az2.html)
(em 11 de Janeiro de 2007).

- [26] Knijnik, Gelsa e Wanderer, Fernanda. (2004), "*Educação matemática e fruição da arte: uma análise da cultura dos azulejos portugueses em suas viagens nos tempos coloniais*". Horizontes, Bragança Paulista, v.22,n.1,p.17-28, Jan./Jun. 2004. Disponível em
*http : //www.saofrancisco.edu.br/edusf/revistas/horizontes/
Horizontes – 2004 – 1/horizontes – 4.pdf*
(em 20 de Março de 2007).
- [27] Os Padrões no Ensino e Aprendizagem da Álgebra. Disponível em
*http : //www.educ.fc.ul.pt/docentes/jponte/DA/DA – TEXTOS/
Vale – Palhares – Cabrita – Borralho.doc.*
(em 26 de Fevereiro de 2007).
- [28] Ana Kozomara. Disponível em:
http : //www.mi.sanu.ac.yu./vismath/ana/